

Referate.

Algebra, Zahlentheorie.

Murnaghan, F. D., and A. Wintner: A canonical form for real matrices under orthogonal transformations. (*Dep. of Math., Johns Hopkins Univ., Baltimore.*) *Proc. nat. Acad. Sci. U.S.A.* **17**, 417—420 (1931).

Es sei \mathfrak{A} eine n -reihige quadratische reelle Matrix. Die Verff. stellen eine Normalform auf, auf die \mathfrak{A} durch Transformation mit einer reellen orthogonalen Matrix gebracht werden kann. Ist \mathfrak{A} normal ($\mathfrak{A}\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}'\mathfrak{A}$), so läßt sich aus der Normalform sofort der Satz ableiten: Eine normale reelle Matrix ist dann und nur dann symmetrisch, schiefsymmetrisch oder orthogonal, wenn alle ihre Eigenwerte auf der reellen bzw. auf der imaginären Achse bzw. auf dem Einheitskreis liegen. Ebenso leicht folgt der Satz: Jede reelle normale Matrix ist Produkt zweier vertauschbarer Matrizen P und Q , P symmetrisch und nichtnegativ definit, Q orthogonal. Köthe (Münster).

Williamson, J.: Bazin's matrix and other allied matrices. *Proc. Edinb. math. Soc.*, II. s. **2**, 240—251 (1931).

The author considers certain compound matrices heretofore discussed only from the standpoint of their determinants. Thus Bazin's matrix is $Y \text{adj. } X$, and its r th compound is Reiss's matrix R_r , multiplied by $|X|^{r-1}$. The relation between the latent roots of these matrices is thus determined. Using the operator $Y\Omega$ instead of $\Omega = [\partial/\partial x_i]$, he obtains some extensions of the theorems of Turnbull, *Proc. Edinb. math. Soc.* II. s. **1**, 111—128 (1928). MacDuffee (Columbus).

Klein, F.: Über rechteckige Matrizen, bei denen die Determinanten maximaler Reihenanzahl teilerfremd zu einem Modul sind. *Jber. dtsch. Math. Ver.igg.* **40**, 233 bis 238 (1931).

Von den im Titel genannten ganzzahligen Matrizen wird die Anzahlfunktion der zu dem erwähnten Modul inkongruenten Matrizen untersucht. Insbesondere wird gezeigt, daß man sich auf Primzahlen als Modul beschränken kann. — Es wird noch eine andere Klasse von Matrizen, die mit der obigen eng zusammenhängt, hinsichtlich derselben Eigenschaft betrachtet und der Zusammenhang zwischen den beiden Anzahlfunktionen hergeleitet. Wegner (Göttingen).

Geronimus, J.: On some problems involving the persymmetric determinants. *Proc. roy. Soc. Edinburgh* **51**, 14—18 (1931).

Application de la théorie des polynomes orthogonaux à trois questions algébriques: 1. résolution d'un problème de Jacobi (interpolation avec des fonctions rationnelles), 2. démonstration d'un théorème de Brioschi, 3. résolution d'un problème de Sylvester (réduction d'une forme binaire de degré $2n - 1$ à une somme $\sum_{i=1}^n (p_i x + q_i y)^{2n-1}$). W. Gontcharow (Charkow).

Magnus, Wilhelm: Untersuchungen über einige unendliche diskontinuierliche Gruppen. *Math. Annalen* **105**, 52—74 (1931).

Bewiesen werden: Erstens ein Satz über die Automorphismen der Gruppe des Listingschen Knotens ($u^3 = v^{-1}uv^2uv^{-1}$), nämlich, daß diese alle schon durch die in der Dehn'schen Arbeit „Über die beiden Kleeblattschlingen“ [*Math. Ann.* **75**, (1914)] angegebenen Automorphismen geliefert werden. Zweitens wird das Identitätsproblem gelöst für die Gruppen mit zwei Erzeugenden a, b und einer definierenden Relation $a^\alpha b^\beta a^\gamma b^\delta = 1$; d. h., es wird ein Verfahren angegeben, um in endlichvielen Schritten zu entscheiden, ob ein gegebener Ausdruck in den Erzeugenden gleich Eins ist. Das wichtigste Hilfsmittel beim Beweis ist des Verf. „Freiheitssatz“ [*J. f. Math.*

163, 141 (1930)]. Drittens der Satz: Jede Untergruppe der Modulgruppe enthält eine freie invariante Untergruppe, deren Faktorgruppe eine zyklische der Ordnung 1, 2, 3 oder 6 ist. van der Waerden (Leipzig).

Remak, Robert: Über die erzeugenden invarianten Untergruppen der subdirekten Darstellungen endlicher Gruppen. J. f. Math. 164, 197–242 (1931).

Ist die Gruppe \mathfrak{G} Untergruppe des direkten Produktes $\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \dots \times \mathfrak{B}_n$ der Gruppen $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_n$, so heißt \mathfrak{G} subdirektes Produkt dieser Gruppen; jedes Element g von \mathfrak{G} ist auf genau eine Weise in der Form $b_1 b_2 \dots b_n = g$ darstellbar, wobei b_i in \mathfrak{B}_i liegt. b_i heißt \mathfrak{B}_i -Komponente von g ; beschränkt man sich auf den Fall, daß \mathfrak{B}_i von den \mathfrak{B}_j -Komponenten der Elemente von \mathfrak{G} erzeugt wird, so heißt \mathfrak{B}_i subdirekter Faktor von \mathfrak{G} ; \mathfrak{B}_i ist isomorph mit $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}_i$, wobei \mathfrak{D}_i aus den Elementen von \mathfrak{G} besteht, deren \mathfrak{B}_i -Komponente das Einheitselement ist. \mathfrak{D}_i heißt „erzeugende invariante Untergruppe“ von \mathfrak{B}_i . Eine subdirekte Zerlegung von \mathfrak{G} heißt „ökonomisch“, wenn die subdirekten Faktoren nicht weiter in subdirekte Faktoren von niederer Ordnung zerlegbar („subdirekt unzerlegbar“) sind, und wenn keiner von ihnen überzählig ist, d. h. wenn nicht alle Elemente von \mathfrak{G} schon durch Angabe ihrer Komponenten nach $n-1$ der subdirekten Faktoren eindeutig bestimmt sind. Eine minimale vom Einheitsselement verschiedene invariante Untergruppe von \mathfrak{G} heißt ein „Fuß“; alle Füße erzeugen eine invariante Untergruppe \mathfrak{S} (den „Sockel“); \mathfrak{S} ist direktes Produkt geeigneter Füße. Sind \mathfrak{D}_i die erzeugenden invarianten Untergruppen einer ökonomischen Zerlegung von \mathfrak{G} und ist $(\mathfrak{D}_i, \mathfrak{S}) = \mathfrak{F}_i$, so ist $\mathfrak{S} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$ (die \mathfrak{F}_i sind Füße) und der Durchschnitt von \mathfrak{S} mit jeder \mathfrak{D}_i echt enthaltenden Untergruppe ist von \mathfrak{F}_i verschieden. Sind \mathfrak{C}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) invariante Untergruppen von \mathfrak{G} , deren Vereinigungsgruppe $\mathfrak{C}^\times = \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \times \dots \times \mathfrak{C}_n$ ist, und ist $\mathfrak{C}^\times = \mathfrak{C}_i \times \mathfrak{D}_i$ und $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{G}/\mathfrak{D}_i$, so ist \mathfrak{G} subdirektes Produkt der \mathfrak{B}_i mit den erzeugenden invarianten Untergruppen \mathfrak{D}_i , und zwar ist \mathfrak{G} als Untergruppe von $\mathfrak{B}_1 \times \dots \times \mathfrak{B}_n$ eindeutig bestimmt, wenn man verlangt, daß die \mathfrak{B}_i in dem oben definierten Sinne subdirekte Faktoren sind. Man sagt, \mathfrak{G} werde mit Hilfe der \mathfrak{C}_i „meromorph“ zerlegt. Wählt man für \mathfrak{C}^\times insbesondere \mathfrak{S} und für $\mathfrak{C}_1, \dots, \mathfrak{C}_n$ eine direkte Zerlegung von \mathfrak{S} in Füße, und zerlegt man die entstehenden subdirekten Faktoren \mathfrak{B}_i nach derselben Methode meromorph weiter (u. s. f., bis man auf subdirekt unzerlegbare Faktoren kommt), wobei man stets Faktoren, deren erzeugende invariante Untergruppen den Sockel \mathfrak{S} enthalten als überzählig fortläßt, so erhält man eine ökonomische Zerlegung von \mathfrak{G} , und man kann jede ökonomische Zerlegung so erhalten. Sind \mathfrak{F}_1 und \mathfrak{F}_2 zwei isomorphe Füße von \mathfrak{G} und ist, wenn $f_{\nu,1}$ und $f_{\nu,2}$ die Elemente von \mathfrak{F}_1 bzw. \mathfrak{F}_2 sind, die Zuordnung von $f_{\nu,1}$ zu $f_{\nu,2}$ eine isomorphe Abbildung von \mathfrak{F}_1 auf \mathfrak{F}_2 , so heißen \mathfrak{F}_1 und \mathfrak{F}_2 dann „kohärent“, wenn die Zuordnung von $g f_{\nu,1} g^{-1}$ zu $g f_{\nu,2} g^{-1}$ denselben Isomorphismus liefert, wobei g ein beliebiges Element von \mathfrak{G} ist. Alle untereinander kohärenten Füße erzeugen eine „Kohärente“. \mathfrak{S} ist direktes Produkt aller Kohärenten $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots, \mathfrak{R}_t$. Es sei $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}_\tau \times \mathfrak{Q}_\tau$ ($\tau = 1, 2, \dots, t$). Mit \mathfrak{D}_τ bezeichne man den Durchschnitt aller der Gruppen, deren Durchschnitt mit \mathfrak{S} gleich \mathfrak{Q}_τ ist, während alle sie echt umfassenden Gruppen einen \mathfrak{Q}_τ echt umfassenden Durchschnitt mit \mathfrak{S} haben. $\mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_t$ sind erzeugende invariante Untergruppen einer subdirekten eindeutig feststehenden Zerlegung von \mathfrak{G} ; man erhält dieselbe Zerlegung von \mathfrak{G} , wenn man die direkte Zerlegung von \mathfrak{S} in Kohärenten (wie oben eine direkte Zerlegung von \mathfrak{S} in Füße) zu einer meromorphen Zerlegung von \mathfrak{G} benutzt und die entstehenden subdirekten Faktoren — wie oben unter Fortlassung überzähliger — mit Hilfe ihrer Kohärenten weiter zerlegt. Diese Zerlegung besitzt t Faktoren; evtl., z. B. falls alle Füße nichtkommutativ sind, ist sie ökonomisch. In einer Reihe von Sätzen werden u. a. in einem erweiterten Sinne

ökonomische Zerlegungen und deren erzeugende invariante Untergruppen und Beziehungen zwischen direkten und subdirekten Zerlegungen behandelt. *Magnus.*

Schur, J.: Affektlose Gleichungen in der Theorie der Laguerreschen und Hermiteschen Polynome. *J. f. Math.* **165**, 52–58 (1931).

Anschließend an seine Arbeit über „Gleichungen ohne Affekt“, Sitzungsber. d. Berl. Ak. **1930**, 443–449, zeigt der Verf., daß die Galoissche Gruppe der Gleichung

$$J_n = \frac{1}{x} \int_0^x L_n dx = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \frac{(-x)^\nu}{(\nu+1)!} = 0$$

für jedes ungerade n und für alle geraden n , für die $n+1$ eine Quadratzahl ist, die alternierende Gruppe \mathfrak{A}_n ist. In allen übrigen Fällen ist die Gleichung ohne Affekt. Ferner beweist der Verf.: Wenn

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2/2} \frac{d^m e^{-x^2/2}}{dx^m} = \sum_{\mu=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} (-1)^\mu \binom{m}{2\mu} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\mu-1) x^{m-2\mu}$$

das m -te Hermitesche Polynom bedeutet und man

$$H_{2n}(x) = K_\mu^{(0)}(x^2), \quad H_{2n+1}(x) = x K_\mu^{(1)}(x^2)$$

setzt, so sind

$$K_n^{(0)}(x) = 0, \quad K_n^{(1)}(x) = 0$$

für $n > 12$ affektlose Gleichungen n -ten Grades. Die Methoden sind: 1. die Kriterien aus der oben genannten Arbeit, 2. der Dedekindsche Satz, der den Zusammenhang zwischen Galoisscher Gruppe der Gleichung und der Primfunktionszerlegung des zugehörigen Polynoms modulo einer Primzahl gibt, und 3. ein Irreduzibilitätskriterium, das der Verf. schon früher abgeleitet hatte. — Die etwas komplizierte notwendige Berechnung der Diskriminante der obigen Gleichung wird in äußerst geschickter Weise abgekürzt.

U. Wegner (Göttingen).

Albert, A. Adrian: Normal division algebras of order 2^{2^m} . (*Dep. of Math., Columbia Univ., New York.*) *Proc. nat. Acad. Sci. U. S. A.* **17**, 389–392 (1931).

Zunächst wird eine charakteristische Bedingung dafür angegeben, daß das direkte Produkt zweier verallgemeinerten Quaternionenalgebren über einem endlichen algebraischen Zahlkörper $F = R(\Theta)$ (R = Körper der Rationalzahlen) eine Divisionsalgebra ist; als Anwendung ergibt sich eine charakteristische Bedingung dafür, daß eine normale Divisionsalgebra der Ordnung 16 über $R(\Theta)$ zyklisch ist. Die Wedderburnsche Normbedingung für zyklische Algebren, die im Fall der Ordnung 16 und eines endlichen algebraischen Zahlkörpers $R(\Theta)$ als Grundbereich die Divisionsalgebren vollständig kennzeichnet, ist für $F = R(\xi, \eta)$ bei Unbestimmten ξ, η nicht mehr notwendig erfüllt. Es werden ferner charakteristische Bedingungen dafür mitgeteilt, daß eine normale Divisionsalgebra der Ordnung 16 über einem Körper F der Charakteristik Null direktes Produkt zweier verallgemeinerten Quaternionenalgebren über F ist, und es wird untersucht, mit welchem Exponenten ϱ man bei einer Divisionsalgebra A der Ordnung 16 das direkte Produkt A^ϱ bilden muß, damit ein vollständiger Matrizenring entsteht; als Folge ergibt sich, daß alle normalen Divisionsalgebren der Ordnung 16 über einem Zahlkörper $R(\Theta)$ zyklisch sind. Für normale Divisionsalgebren der Ordnung 2^{2^m} über $R(\Theta)$ wird u. a. ϱ zu 2^m bestimmt. Betrachtungen über die zu normalen Divisionsalgebren gehörigen Gleichungen mit Koeffizienten aus F geben genaueren Einblick in den Aufbau von A und seinen Potenzen A^s ; insbesondere ergibt sich die Bestimmung aller normalen Divisionsalgebren der Ordnung 64 über einem Zahlkörper $R(\Theta)$. Als weitere Anwendung erhält man, daß eine normale Divisionsalgebra der Ordnung n^2 über $R(\Theta)$ dann und nur dann selbstreziprok ist, wenn $n = 2$ wird; hieraus folgt, daß die Multiplikationsalgebra einer reinen Riemannschen Matrix erster Art entweder ein Zahlkörper $R(\Theta)$ oder eine verallgemeinerte Quaternionenalgebra über einem solchen Zahlkörper ist. Auf eine Mitteilung der Beweise ist vorerst verzichtet.

Grell (Jena).

MacDuffee, C. C.: The discriminant matrix of a semi-simple algebra. Trans. amer. math. Soc. **33**, 425—432 (1931).

Let \mathfrak{A} be a linear associative algebra of order n over a field \mathfrak{F} in which n has a reciprocal. In a former paper, the writer defined the first and second discriminant matrices, T_1 and T_2 , of n elements of \mathfrak{A} . [Annals of Mathematics **32**, 60 (1931), cf. this Zbl. **1**, 193.] The fundamental theorem of this paper states that if \mathfrak{A} has a principal unit, basal numbers e_1, e_2, \dots, e_n of \mathfrak{A} may be chosen so that $T_1(e_i)$ is in a certain simple form. Assume hereafter that \mathfrak{A} is semi-simple. It is shown that for every system of basal numbers e_i , $T_1(e_i) = T_2(e_i)$. $T \equiv T_1(e_i)$ is defined as the discriminant matrix of \mathfrak{A} , with respect to this basis. It is then shown, for every system of e 's, that if $R(x)$, $S(x)$ are the first and second matrices of the general element x of \mathfrak{A} , $S(x) = TR(x)T^{-1}$ and the characteristic functions of x are identical. If \mathfrak{A} is the direct sum or if it is the direct product of two algebras, a relation between the discriminant matrices of the three algebras is obtained, after proper choice of basal numbers. If \mathfrak{A} is a complete matrix algebra, another simple form for T is given. *Cl. G. Latimer* (Lexington).

McCoy, Neal H.: On some general commutation formulas. Amer. J. Math. **53**, 710—720 (1931).

If (x_1, \dots, x_n) are elements of a non-commutative algebra and if f and g are polynomials in these elements, g being of the form $\sum a_{m_1 \dots m_n} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$, the following theorem is proven:

$$fg - gf = \sum_{s=1}^n c^s \sum_{i_1 + \dots + i_n = s} \frac{1}{i_1! \dots i_n!} \frac{\partial^s g}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} D_{x_n}^{i_n} \dots D_{x_1}^{i_1} f \quad (1)$$

where $D_{x_i} f \equiv (f x_i - x_i f)/c$, c being a real or complex number. The proof is by induction. A similar theorem is obtained by the use of a transformation $f \rightarrow \bar{f}$ where \bar{f} is obtained by reversing the order of the factors in every term of f and by changing the sign of c wherever it occurs in f . On applying these results to n pairs of quantum variables $(p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n)$ which satisfy the relations $p_r q_s - q_s p_r = c \delta_{rs}$; $p_r p_s - p_s p_r = 0$; $q_r q_s - q_s q_r = 0$ (where $\delta_{rs} = 1$ if $r = s$ and $= 0$ if $r \neq s$) the author obtains two general theorems of which the first is

$$fg - gf = \sum_{s=1}^n c^s \sum_{k_1 + \dots + k_{2n} = s} \frac{(-1)^{k_1 + k_2 + \dots + k_{2n-1}}}{k_1! \dots k_{2n}!} \frac{\partial^s g}{\partial p_1^{k_1} \partial q_1^{k_2} \dots \partial p_n^{k_{2n-1}} \partial q_n^{k_{2n}}} \quad (2)$$

$$\cdot \frac{\partial^s f}{\partial q_1^{k_1} \partial p_1^{k_2} \dots \partial q_n^{k_{2n-1}} \partial p_n^{k_{2n}}}.$$

Applications are given to an algebra of functions of three elements α, β, γ which satisfy the relations $\alpha\beta - \beta\alpha = c\gamma$, $\beta\gamma - \gamma\beta = c\alpha$, $\gamma\alpha - \alpha\gamma = c\beta$. The results of the paper are generalizations of formulae given by Wentzel, Z. Physik **37**, 85 (1926).

Murnaghan (Baltimore).

Weber, Werner: Umkehrbare Ideale. Math. Z. **34**, 131—157 (1931).

Die von Dedekind für den Spezialfall des quadratischen Körpers durchgeführte Theorie der umkehrbaren Ideale wird hier mit den Methoden der modernen Algebra für beliebige Zahlkörper in Angriff genommen. Bei einem in einem (gewöhnlichen kommutativen) Körper K gelegenen Ring \mathfrak{R} mit Einselement werden für die in K gelegenen \mathfrak{R} -Moduln nach Dedekind die Begriffe Ordnung und Umkehrbarkeit samt ihren elementaren Folgerungen abgeleitet; bei fester \mathfrak{R} -Ordnung n wird insbesondere betrachtet die Menge \mathfrak{B}_n der in n gelegenen Ideale mit n als Ordnung und die Abelsche Gruppe der Idealklassen aus \mathfrak{B}_n . Die Voraussetzung des eingeschränkten Doppelkettensatzes für die Ordnungen n , \mathfrak{R} mit $n \subseteq \mathfrak{N}$ und einem Führer $\mathfrak{f} = n$: $\mathfrak{R} \neq (0)$ gestattet, unter Benutzung der Theorie der zum Führer teilerfremden Ideale die Aufspaltung der Idealklassen aus \mathfrak{B}_n in solche aus \mathfrak{B}_n genauer zu verfolgen. Setzt man für \mathfrak{R} die Hauptidealeigenschaft voraus, so läßt sich für die Ideale \mathfrak{a} einer endlichen \mathfrak{R} -Ordnung n mit n als zugehöriger Ordnung eine Norm $N \mathfrak{a}$ definieren; für zwei solche

Ideale a, b , von denen mindestens eines umkehrbar ist, gilt $Na \cdot b = N a \cdot N b$. Ist ferner der Quotientenkörper T von \mathfrak{n} eine endliche separable Erweiterung des entsprechenden P von \mathfrak{R} , so gilt für ein Ideal a aus $\mathfrak{B}_{\mathfrak{n}}$ die Beziehung

$$a^{(1)} \dots a^{(n)} = N a \cdot n^{(1)} \dots n^{(n)},$$

wo die oberen Indizes die konjugierten Moduln in den zu T bez. P konjugierten Körpern bedeuten. Für endliche Ordnungen n_1, n_2 mit dem Quotientenkörper T und Idealen a aus \mathfrak{B}_{n_1} und b aus \mathfrak{B}_{n_2} hat man ebenfalls $Na \cdot b = N a \cdot N b$. Wird schließlich für \mathfrak{R} an Stelle der Hauptidealeigenschaft der Teilerkettensatz und ganze Abgeschlossenheit im Quotientenkörper P , für \mathfrak{n} Endlichkeit und eingeschränkter Vielfachenkettensatz, für T Separabilität bez. P vorausgesetzt, so ergibt sich (als Seitenstück eines bekannten E. Noetherschen Resultates) aus der Voraussetzung, daß alle Ideale aus $\mathfrak{B}_{\mathfrak{n}}$ sich (bis auf Reihenfolge der Faktoren) eindeutig als Produkt von Idealen eines Bereiches $\mathfrak{B}_{\mathfrak{n}}$ von Idealen aus \mathfrak{n} darstellen lassen, die ganze Abgeschlossenheit von \mathfrak{n} in T ; dabei braucht $\mathfrak{B}_{\mathfrak{n}}$ weder aus Idealen von $\mathfrak{B}_{\mathfrak{n}}$ noch aus Primidealen zu bestehen.

Grell (Jena).

Levitzki, Jakob: Über vollständig reduzible Ringe und Unterringe. Math. Z. 33, 663—691 (1931).

In der Arbeit „Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie“ von E. Noether [Math. Z. 30, 641 (1929)] wird die Darstellungstheorie der endlichen Gruppen zurückgeführt auf die Untersuchung der Struktur der hyperkomplexen Systeme. Der Verf. führt nun analog die Theorie des Zusammenhanges der Darstellungen der Untergruppen mit denen der ganzen Gruppe (es handelt sich vor allem um die imprimitiven durch eine Untergruppe erzeugten Darstellungen der ganzen Gruppe und die Frobeniusschen Charakterrelationen) zurück auf ein ringtheoretisches Problem: Die Untersuchung der vollständig reduziblen (v. r.) Unterringe eines v. r. Ringes. Damit ist zugleich eine viel allgemeinere Problemstellung gewonnen. Die Hauptresultate über die v. r. Unterringe sind die folgenden: \mathfrak{o} und $\bar{\mathfrak{o}} \subseteq \mathfrak{o}$ seien v. r. Ringe, die das Einheitselement gemeinsam haben und den Automorphismenkörper. Letzteres bedeutet, daß die zweiseitig einfachen Summanden vom \mathfrak{o} bzw. $\bar{\mathfrak{o}}$ alle (bis auf Isomorphie) denselben Automorphismenkörper besitzen, der für \mathfrak{o} und $\bar{\mathfrak{o}}$ derselbe ist. Es sei „Länge“ eines Ideals die Anzahl der einfachen Rechtsideale einer direkten Zerlegung des Ideals; der „Index“ in \mathfrak{o} des Rechtsideals $\bar{\mathfrak{o}}$ von $\bar{\mathfrak{o}}$ die Länge des Erweiterungsideals $\bar{\mathfrak{o}} \mathfrak{o}$. Es seien $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}^{(1)} + \dots + \mathfrak{o}^{(r)}$ und $\bar{\mathfrak{o}} = \bar{\mathfrak{o}}_1 + \dots + \bar{\mathfrak{o}}_r$ die zweiseitigen Zerlegungen von \mathfrak{o} und $\bar{\mathfrak{o}}$ und $\mathfrak{o}_\lambda^{(v)}$ die Komponente von $\bar{\mathfrak{o}}_{(\lambda)}$ in $\mathfrak{o}^{(v)}$. $n^{(v)}$ sei die Länge von $\mathfrak{o}^{(v)}$, \bar{n}_λ die von $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$, $j_\lambda^{(v)}$ der Index von $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda^{(v)}$ in bezug auf $\mathfrak{o}^{(v)}$. Dann gelten

die Relationen (1) $n^{(v)} = \sum_{\lambda=1}^r \bar{n}_\lambda j_\lambda^{(v)}$, $v = 1, \dots, r$. Andererseits gibt es bei gegebenem \mathfrak{o} , also gegebenen $n^{(v)}$, zu jedem Lösungssystem $j_\lambda^{(v)}$, \bar{r} , \bar{n}_λ von (1) einen v. r. Unterring von \mathfrak{o} mit diesen „charakteristischen Zahlen“. Unterringe mit gleichen charakteristischen Zahlen gehen durch Transformation mit einem geeigneten regulären Element des Ringes ineinander über, also gibt es nur endlich viele verschiedene Klassen von v. r. Unterringen mit gemeinsamen Automorphismenkörpern. Diese Klassen sind eindeutig durch die Lösungssysteme von (1) charakterisiert. Verf. untersucht ferner, wann ein v. r. Unterring $\bar{\mathfrak{o}}$ von \mathfrak{o} Darstellungsunterring ist, d. h. wann \mathfrak{o} Darstellungsmodul in bezug auf $\bar{\mathfrak{o}}$ ist, $\mathfrak{o} = A_1 \bar{\mathfrak{o}} + \dots + A_m \bar{\mathfrak{o}}$. Zu (1) kommt jetzt noch ein zweites Gleichungssystem hinzu, in das m , der „Darstellungsindex“, eingeht. Wiederum sind die endlich vielen Klassen von Darstellungsunterringen durch die Lösungssysteme der beiden Gleichungssysteme charakterisiert. Gibt es reguläre, mit \mathfrak{o} vertauschbare A_i , so heißt der Darstellungsunterring „normaler“ Unterring. Auch diese können eindeutig durch Bedingungen über Längen und Indizes charakterisiert werden. Zusammenhang mit der Gruppentheorie: Der durch die Elemente einer Untergruppe erzeugte Unterring des Gruppenringes ist Darstellungsunterring, der durch einen

Normalteiler erzeugt ist normaler Unterring. Die Resultate über imprimitive Darstellungen und die Frobeniusschen Relationen folgen jetzt übersichtlich aus den obigen Gleichungssystemen und einfachen Überlegungen über die Charaktere.

Köthe (Münster).

Witt, Ernst: Über die Kommutativität endlicher Schiefkörper. Abh. math. Semin. Hambg Univ. 8, 413 (1931).

Mit der Abschätzung $|\Phi_n(q)| \geq q - 1$ ($= q - 1$ nur für $u = 1$) des Kreisteilungspolynoms für $q = 2, 3, \dots$ und einigen elementaren Sätzen über endliche Gruppen wird in verblüffend einfacher Weise die Kommutativität der endlichen Schiefkörper bewiesen.

Köthe (Münster).

Köthe, Gottfried: Schiefkörper unendlichen Ranges über dem Zentrum. Math. Annalen 105, 15—39 (1931).

Die Theorie der nichtkommutativen Körper (Schiefkörper) endlichen Ranges über dem Zentrum hat in den letzten Jahren entscheidende Fortschritte gemacht. Hier werden die wesentlichsten Ergebnisse auf Körper von unendlichem Rang (über dem Zentrum) übertragen. Die Methoden sind zum Teil diejenigen, die Referentin für Behandlung hyperkomplexer Fragen entwickelt hat; zum Teil denjenigen nachgebildet, mit denen analoge Fragen im Kommutativen behandelt werden (Topologisierung). Es handelt sich um solche Schiefkörper, die das Analogon zu unendlichen algebraischen Erweiterungen bilden, bei denen also je endlich viele Elemente in einem Schiefkörper endlichen Ranges liegen. Die Existenz solcher Schiefkörper wird durch direkte Produktbildung nachgewiesen. Und zwar wird neben dem Fall teilerfremder Rangzahlen in Verallgemeinerung eines Brauerschen Beispiels auch derjenige gleicher Rangzahlen betrachtet: der resultierende unendliche Schiefkörper hat dann endlichen Exponenten; d. h. eine Potenz wird voller Matrizenring über dem Zentrum. Umgekehrt wird die Frage nach der direkten Produktzerlegung eines gegebenen Schiefkörpers untersucht. Weiter werden die Bedingungen angegeben, unter denen sich der Brauersche Satz über die Abelsche Gruppe der Klassen einfacher Systeme übertragen läßt. Schließlich wird durch geeignete Topologisierung die Galoissche Gruppe eines Schiefkörpers gewonnen, als abgeschlossene Hülle der Gruppe der inneren Automorphismen.

E. Noether (Göttingen).

Petersson, Hans: Über Potenzreihen mit ganzen algebraischen Koeffizienten. Abh. math. Semin. Hambg Univ. 8, 315—322 (1931).

Der Verf. gibt folgende Verallgemeinerung des bekannten Satzes von Carlson [Math. Z. 9, 1—13 (1921)]. Es seien die N analytischen Funktionen $f_i(z)$, $1 \leq i \leq N$ von folgender Beschaffenheit: Jedes $f_i(z)$ ist in einem Kreise $|z| < R_i$ eindeutig, bis auf endlich viele Singularitäten regulär und in der Umgebung des Punktes $z = 0$ in die

Potenzreihe $f_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(i)} z^n$ entwickelbar. Die Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(i)} z^n$ bilden ein System konjugierter Potenzreihen bezüglich des algebraischen Zahlkörpers k mit ganzen Koeffizienten α_n . Ferner sei $\prod_{i=1}^N R_i = 1$. Dann ist entweder keine Funktion $f_i(z)$ über

den Kreis $|z| = R_i$ hinaus fortsetzbar, oder alle $f_i(z)$ sind rationale Funktionen von z . Daß der Carlsonsche Satz für eine einzige Funktion, deren Potenzreihe ganze Koeffizienten aus k besitzt, nicht zutrifft, außer wenn k rational oder imaginär-quadratisch ist, zeigt ein von Artin gegebenes Beispiel.

Myrberg (Helsinki).

Pólya, G.: Über Potenzreihen mit ganzen algebraischen Koeffizienten. Abh. math. Semin. Hambg Univ. 8, 401—402 (1931).

Im Anschluß an die gleichnamige Arbeit von Petersson (s. vorst. Ref.) betrachtet der Verf. Systeme von Potenzreihen

$$f_i(z) = \frac{\alpha_0^{(i)}}{z} + \frac{\alpha_1^{(i)}}{z^2} + \dots + \frac{\alpha_n^{(i)}}{z^{n+1}} + \dots,$$

deren Koeffizienten $\alpha_n^{(1)}, \alpha_n^{(2)}, \dots, \alpha_n^{(N)}$ konjugierte ganze Zahlen in einem System konjugierter algebraischer Zahlkörper sind. Keine der Reihen sei stets divergent und es sei die analytische Fortsetzung von $f_i(z)$ regulär und eindeutig außerhalb einer abgeschlossenen Punktmenge, deren transfiniter Durchmesser τ_i sei. Ist

$$\tau_1 \tau_2 \dots \tau_N < 1,$$

so sind die Funktionen $f_i(z)$ sämtlich rational.

Myrberg (Helsinki).

König, Robert, und Maximilian Krafft: Über Primfunktionen. J. f. Math. 165, 96—108 (1931).

Die Verff. behandeln die Konstruktion einer Primfunktion für eine geschlossene, n -blättrige Riemannsche Fläche T vom Geschlechte $p > 1$, d. h. einer Funktion $\Theta(\zeta, \tau)$ der beiden Stellen ζ und τ von T , die nur für $\zeta = \tau$ und zwar von erster Ordnung verschwindet. Die Bedeutung einer solchen Primfunktion liegt bekanntlich darin, daß sich mit ihr jede zu T gehörige algebraische Funktion ganz ebenso aus ihren Nullstellen und Polen aufbauen läßt, wie das für die rationalen Funktionen mit Hilfe der Linearfaktoren möglich ist. Nach geläufigen Sätzen der algebraischen Funktionentheorie gibt es jedoch unter den zu T gehörigen algebraischen Funktionen keine Primfunktion. Dagegen haben Weierstraß und Prym unter Verzicht auf das Freisein von wesentlichen Singularitäten bzw. auf die Eindeutigkeit auf T Verfahren zur Bildung von Primfunktionen angegeben; außerdem kann aus der bei Klein auftretenden, in homogenen Veränderlichen geschriebenen „Primform“ ebenfalls eine Primfunktion gewonnen werden. Verff. geben nun zunächst eine direkte Herleitung dieser Kleinschen Primfunktion in Anlehnung an die Herstellung der Primform bei Klein-Fricke und daran anschließend eine vereinfachte Ableitung ihrer multiplikativen Perioden. Sie zeigen ferner, daß auch die Prymsche Primfunktion, deren Existenz Prym aus einem allgemeinen Existenztheorem entnimmt, wirklich hingeschrieben werden kann, und daß sich auf diese Weise die Prymsche Konstruktion leichter überblicken läßt.

F. K. Schmidt (Erlangen).

Jung, Heinrich W. E.: Algebraische Funktionen von zwei Veränderlichen. A. Totale Differenziale. (Algebraischer Teil.) J. f. Math. 165, 128—158 (1931).

Die Arbeit bezweckt einen arithmetischen Aufbau der Theorie der algebraischen Funktionen von zwei Variablen (oder der algebraischen Flächen), die bisher geometrisch oder funktionentheoretisch entwickelt wurde. Die Arbeitsweise ist der Dedekind-Weberschen Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen entsprechend und benutzt die vom Verf. an verschiedenen Stellen entwickelte Theorie der Divisoren und Divisorenklassen. Das Hauptresultat ist ein Beweis des Satzes von Severi, daß die Anzahl der linear unabhängigen einfachen Integrale zweiter Gattung eines Körpers K von algebraischen Funktionen zweier Variablen x und y höchstens gleich dem Defekt von K ist. Verf. führt den Begriff des Defektes $\omega_{\mathfrak{P}}(\Omega)$ einer Divisorenklasse (Ω) in Beziehung auf einen Primdivisor \mathfrak{P} ein: \mathfrak{P} entspricht eine Abbildung von K auf einen Körper \mathfrak{P} von einer Variablen, bei der die ganzen Divisoren der Klasse (Ω) in eine lineare Schar \mathfrak{S} übergehen, die in einer Divisorenklasse (q) des Körpers \mathfrak{P} enthalten ist, aber im allgemeinen nicht alle ganzen Divisoren von (q) umfaßt; der Überschuß der Dimension von (q) über die Dimension der linearen Schar \mathfrak{S} ist der Defekt $\omega_{\mathfrak{P}}(\Omega)$. Verf. gibt auch einfache Beispiele für $\omega_{\mathfrak{P}}(\Omega) > 0$. Der Defekt von K ist das Maximum aller Defekte $\omega_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{C})$ (\mathfrak{C} Primdivisor). Den Hauptsatz der Theorie, daß die Anzahl der linear unabhängigen einfachen Integrale zweiter Gattung gleich dem Defekt ist, beweist Verf. nicht, dazu fehlt wohl noch eine arithmetische Fassung des Begriffes der kontinuierlichen Kurvenschar.

Deuring (Göttingen).

Hensel, Kurt: Arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen von zwei Variablen. 1. Abh. J. f. Math. 165, 257—264 (1931).

Verf. gibt eine direkte, die allgemeine Bewertungstheorie nicht voraussetzende Darstellung folgender Tatsachen: Der Körper $\mathfrak{K}(x, y)$ aller rationalen Funktionen in

zwei Veränderlichen mit bel. komplexen Zahlkoeffizienten kann in bezug auf ein festes Primpolynom $p(x, y)$ in entsprechender Weise zu einem p -adischen Körper $\mathfrak{K}(p)$ ergänzt werden wie der Körper der rationalen Zahlen in bezug auf eine Primzahl. Wie bei den Zahlen, kann jede endliche algebraische Erweiterung von $\mathfrak{K}(p)$ aufgefaßt werden als ein π -adischer Körper $\mathfrak{K}(\pi)$, für dessen Primelement π die Gleichung $p = \varepsilon \pi^e$ mit einer Einheit ε modulo π besteht und dessen algebraischer Grad über $\mathfrak{K}(p)$ gleich dem Produkt aus dem Grad und der Ordnung des Primelements π ist. *Schmidt* (Erlangen).

Remak, Robert: Elementare Abschätzungen von Fundamenteinheiten und des Regulators eines algebraischen Zahlkörpers. J. f. Math. 165, 159—179 (1931).

Im ersten Paragraphen wird der Minkowskische Existenzbeweis für die Einheiten eines algebraischen Zahlkörpers K zum Nachweis der Existenz einer Einheit ausgebaut, von der eine reelle Konjugierte oder ein Paar konjugiert imaginärer Konjugierter mit vorgeschriebener Nummer dem Betrage nach größer als 1 ist, während die übrigen Konjugierten dem Betrage nach kleiner als 1 sind. Im § 2 zieht Verf. die Landausche Abschätzung für die Größen $|\log |\eta^{(k)}||$ heran, wo η eine beliebige Einheit aus K und $\eta^{(k)}$ ihre k -te Konjugierte bezeichnet. Es ergibt sich insbesondere für die Einheit ε_1 , deren Nummer im obigen Sinne 1 ist, die Ungleichung

$$\log(|\varepsilon_1|^{e_1}) \leq \frac{1}{(n-1)!} A^* \log^{n-1} A^* + C A^* \log^{n-2} A^*,$$

wo $e_i = 1$ oder 2, je nachdem die i -te Konjugierte $K^{(i)}$ von K reell oder komplex ist,

$$A^* = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{r_2} |\sqrt{D}|,$$

D die Diskriminante, n den Grad von K und C eine nur von n abhängige Konstante bezeichnet. Nunmehr wird gezeigt, daß man aus den Einheiten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{r+1}$, wo ε_i die eingangs erwähnte Einheit mit der Nummer i bezeichnet, durch Streichen einer beliebigen unter ihnen ein System unabhängiger Einheiten erhält, und hieraus ergibt sich durch Heranziehung zweier Hilfssätze ein Existenzbeweis für ein System von Grundeinheiten und die folgende Abschätzung des Regulators R :

$$|R| \leq \left(\frac{1}{(n-1)!} A^* \log^{n-1} A^* + C A^* \log^{n-2} A^*\right)^r.$$

In den Hilfssätzen handelt es sich einmal um die Aufgabe, solche Grundvektoren eines m -dimensionalen Punktgitters G ausfindig zu machen, welche sich mit absolut kleinsten Koeffizienten durch gegebene Grundvektoren eines m -dimensionalen Teilgitters von G linear darstellen lassen; ferner um eine Determinantenabschätzung von folgender Art: In einer Determinante D seien die Glieder außerhalb der Hauptdiagonale nicht-positiv, dagegen die Zeilensummen nicht-negativ. Dann liegt D zwischen dem Produkt der Zeilensummen und dem (natürlich mindestens so großen) Produkt der Hauptdiagonalglieder.

Petersson (Hamburg).

Hasse, Helmut: Neue Begründung der komplexen Multiplikation. II. Tl. Aufbau ohne Benutzung der allgemeinen Klassenkörpertheorie. J. f. Math. 165, 64—88 (1931).

Zusammen mit Teil I: Einordnung in die allgemeine Klassenkörpertheorie, J. f. Math. 157, 115—139 (1927) ein vollständiger Abriss der Theorie der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen, soweit sie sich auf die funktionentheoretische Konstruktion der Klassenkörper eines imaginärquadratischen Grundkörpers Ω bezieht. Absch. I mit Absch. I von T. I bringt die bekannte Konstruktion des absoluten Klassenkörpers K von Ω mittels der absoluten Invariante $j(w)$. Es werden alle Eigenschaften von K festgestellt, die sich aus den Hauptsätzen der Klassenkörpertheorie ergeben, bis auf die Bestimmung der Diskriminante von K/Ω und den Beweis des Artinschen Reziprozitätsgesetzes für die Primteiler der Diskriminante der Klassengleichung $H(t)$ von Ω . Das Artinsche Reziprozitätsgesetz für K folgt aus der Kongruenz

$$j(\mathfrak{f})^{\mathfrak{N}\mathfrak{p}} \equiv j(\mathfrak{f}_p^{-1}\mathfrak{f}) \pmod{\mathfrak{p}} \quad \left(\begin{array}{l} \mathfrak{f}_p \text{ die Idealklasse von } \mathfrak{p}, \\ \mathfrak{f} \text{ irgendeine Idealklasse} \end{array} \right) \quad (1)$$

für alle nicht in der Diskriminante von $H(t)$ aufgehenden Primideale \mathfrak{p} von Ω , wenn man benutzt, daß ein Isomorphismus zwischen der Idealklassengruppe von Ω und der Galoisschen Gruppe von K/Ω dadurch entsteht, daß der Klasse \mathfrak{f}_0 die Substitution $j(\mathfrak{f}) \rightarrow j(\mathfrak{f}_0^{-1}\mathfrak{f})$ zu-

geordnet wird. Für Primideale ersten Grades war statt (1) nur $j(\mathfrak{f})^{N\mathfrak{p}}$ entweder $\equiv j(\mathfrak{f}_p^{-1}\mathfrak{f})$ oder $\equiv j(\mathfrak{f}_p\mathfrak{f}) \pmod{\mathfrak{p}}$ bekannt.

In Abschnitt II wird die Konstruktion des Strahlklassenkörpers T_m nach einem Modul m auf die von Weber eingeführte Funktion erster Stufe

$$\tau(u; w_1, w_2) = 2^8 3^4 g_3^2(w_1, w_2) \Delta^{-1}(w_1, w_2) \wp^2(u; w_1, w_2) \quad \text{für } \Omega = P(\sqrt{-1}),$$

$$\tau(u; w_1, w_2) = -2^9 3^6 g_3(w_1, w_2) \Delta^{-1}(w_1, w_2) \wp^3(u; w_1, w_2) \quad \text{für } \Omega = P(\sqrt{-3}),$$

$$\tau(u; w_1, w_2) = -2^7 3^5 g_2(w_1, w_2) g_3(w_1, w_2) \Delta^{-1}(w_1, w_2) \wp(w_1, w_2) \quad \text{sonst}$$

gegründet. $\tau(u; w_1, w_2)$ ist so eingerichtet, daß, wenn α_1, α_2 eine Basis eines Ω -Ideals \mathfrak{a} ist, $\tau(u; \alpha_1, \alpha_2) = \tau(u, \mathfrak{a})$ bei der Gruppe $\mathfrak{U}_{\mathfrak{a}}$ der ganzen linearen Transformationen $u' = \varepsilon u + n_1 \alpha_1 + n_2 \alpha_2$, die \mathfrak{a} in sich überführen, invariant bleibt und einen Diskontinuitätsbereich von $\mathfrak{U}_{\mathfrak{a}}$ schlicht auf die volle Zahlenkugel abbildet. Jeder Strahlklasse \mathfrak{f}^* mod. m von Ω wird ein Wert $\tau(\mathfrak{f}^*)$ von $\tau(u; w_1, w_2)$ folgendermaßen eindeutig zugeordnet: τ sei ein ganzes Ideal in \mathfrak{f}^* , und das Ω -Ideal \mathfrak{a} sei so gewählt, daß $\tau\mathfrak{a}/m = (\varrho)$ ein Hauptideal ist, dann wird $\tau(\mathfrak{f}^*) = \tau(\varrho, \mathfrak{a})$ gesetzt. Die $\tau(\mathfrak{f}^*)$ sind algebraische Zahlen und für jedes \mathfrak{f}^* ist $K(\tau(\mathfrak{f}^*))$ der Strahlklassenkörper mod. m von Ω , was in T. I mittels des Zerlegungsgesetzes für die Primideale ersten Grades von Ω bewiesen wurde. Dies folgt aus (1) und der zu (1) analogen Kongruenz

$$\tau(\mathfrak{f}^*) \equiv \tau(\mathfrak{f}_p^* \mathfrak{f}^*) \pmod{\mathfrak{p}}, \quad (2)$$

in der \mathfrak{p} ein Primideal ersten Grades von Ω bedeutet, das weder in der Diskriminante von Ω , noch in $N(m)$, noch auch in den Diskriminanten aller $\Omega(\tau(\mathfrak{f}^*))/\Omega$ aufgeht, und in der \mathfrak{f}^* die Strahlklasse von \mathfrak{p} , \mathfrak{f}^* irgendeine Strahlklasse mod. m bezeichnet.

Um ohne die Hauptsätze der Klassenkörpertheorie die Eigenschaften von $K(\tau(\mathfrak{f}^*))$ festzustellen, wird zunächst gezeigt, daß die „Strahlklassengleichung zu einer absoluten Idealklasse \mathfrak{f}^* “, das ist das Polynom

$$T_m(t, \mathfrak{f}) = \prod_{\mathfrak{f}^* \text{ in } \mathfrak{f}^{-1}m} (t - \tau(\mathfrak{f}^*)), \quad (\mathfrak{f}_m \text{ die absolute Idealklasse von } m)$$

ein Polynom von t und $j(\tau)$ mit von \mathfrak{f} unabhängigen Koeffizienten aus Ω ist. Dazu wird das „Verallgemeinerte Prinzip der komplexen Multiplikation“ benutzt: n sei ein ganzes Ideal $\neq 1$, \mathfrak{a} irgendein Ideal der absoluten Klasse \mathfrak{f} von Ω . Dann existiert eine rationale Funktion $R_n(t, v)$ mit Koeffizienten aus Ω , die lediglich von n , nicht von \mathfrak{a} oder \mathfrak{f} abhängt, so daß $\tau(u, \mathfrak{a}/n) = R_n(\tau(u, \mathfrak{a}), j(\mathfrak{f}))$ ist. Dann wird unter Zuhilfenahme von (1), (2) die Irreduzibilität von T_m in K auf ganz ähnliche Weise bewiesen, wie die Irreduzibilität der absoluten Klassen Gleichung $H(t)$ mittels (1). Das verall. Prinzip d. kompl. Mult. wird weiter dazu benutzt, um zu zeigen, daß alle $\tau(\mathfrak{f}^*)$ ein und denselben über Ω galoisschen Körper $K(\tau(\mathfrak{f}^*)) = \dots = K(\tau(\mathfrak{f}_m^*)) = K_m$ erzeugen, und daß die Gruppe von K_m/Ω dadurch auf die Strahlklassengruppe mod. m von Ω isomorph bezogen ist, daß einer Strahlklasse \mathfrak{f}^* mod. m der durch $\tau(\mathfrak{f}^*) \rightarrow \tau(\mathfrak{f}_0^* \mathfrak{f}^*)$, $j(\mathfrak{f}) \rightarrow j(\mathfrak{f}_0^{-1}\mathfrak{f})$ gegebene Automorphismus von K_m/Ω zugeordnet wird; \mathfrak{f}^* durchläuft alle Strahlklassen mod. m und \mathfrak{f} bedeutet die absolute Klasse von \mathfrak{f}^* . Dieser Isomorphismus ergibt in Verbindung mit (2) ohne weiteres das Artinsche Reziprozitätsgesetz für die Primideale ersten Grades von Ω , die prim sind zur Diskriminante von Ω , zu $N(m)$, zur Diskriminante von $H(t)$ und zu den Diskriminanten der Strahlklassengleichungen $T_m(t, \mathfrak{f})$. Die übrigen Tatsachen, das Reziprozitätsgesetz für die noch fehlenden Primideale, daß m genau dieselben Primfaktoren enthält wie die Diskriminante von K_m/Ω und das Zerlegungsgesetz für die Primteiler von m , die sich wenigstens zum Teil durch Heranziehung von Funktionen zweiter Stufe unabhängig von der allgemeinen Klassenkörpertheorie beweisen lassen, konnte Verf. noch nicht in seine Theorie einordnen, die allein mit Funktionen erster Stufe auskommt.

Max Deuring (Göttingen).

Iyanaga, Shôichi: Über den allgemeinen Hauptidealsatz. (*Math. Inst., Kais. Univ. Tokyo.*) *Jap. J. Math.* 7, 315–333 (1931).

Unter dem „allgemeinen Hauptidealsatz“ werde die folgende Frage verstanden: Gegeben ein Grundkörper k und ein relativ-Abelscher Oberkörper K von k . K ist Klassenkörper über k für einen geeignet gewählten Führer \mathfrak{f} des Grundkörpers. Es ist ein Führer \mathfrak{F} für den Oberkörper anzugeben, so daß alle Ideale des Grundkörpers im Oberkörper in den Strahl mod \mathfrak{F} fallen. Es handelt sich also nicht um ein „Hauptidealwerden“ im gewöhnlichen Sinne. Zu einem solchen Ideal \mathfrak{F} , welches für $\mathfrak{f} \neq 1$ stets ebenfalls $\neq 1$ ist, gelangt der Verf. durch das Studium der Geschlechter. Die Primzahlpotenzen $l_1^*, l_2^*, \dots, l_m^*$ seien die Invarianten der Abelschen Relativgruppe des Körpers K in bezug auf k ; K_1, K_2, \dots, K_m die relativ-zyklischen Zwischenkörper von k und K von den Relativgraden $l_1^*, l_2^*, \dots, l_m^*$, deren Zusammensetzung den Körper K ergibt. $\mathfrak{f}(K_i/k)$ sei der Führer des Körpers K_i in bezug auf k . Unter dem

„Geschlechtsmodul“ $\mathfrak{F}(K_i/k)$ werde jenes Ideal von K_i verstanden, das $\mathfrak{f}(K_i/k)$ teilt, und als Führer in K_i betrachtet, folgende Eigenschaft hat: Jede Klasse von K_i , deren Relativnorm in die Hauptklasse von k fällt, ist die symbolische $(1 - S_i)$ -te Potenz einer Klasse von K_i , wobei S_i die erzeugende Substitution der Relativgruppe K_i/k bedeutet. (Vgl. Takagi, J. coll. sc. Tokyo 41, 91 oder Hasse, Bericht Ia, 128.) Als Geschlechtsmodul $\mathfrak{F}(K/k)$ definiert der Verf. das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Ideale $\mathfrak{F}(K_1/k)$, $\mathfrak{F}(K_2/k)$, ..., $\mathfrak{F}(K_m/k)$ und er beweist den Satz: Ist K Strahlklassenkörper von $k \bmod \mathfrak{f}$, so enthält der Strahl $\bmod \mathfrak{F}(K/k)$ alle Ideale des Grundkörpers k . Dieser Satz wird analog dem gewöhnlichen Hauptidealsatz auf eine Aussage über zweistufige Gruppen zurückgeführt. Es wird nämlich gezeigt, daß der Strahlklassenkörper K^* über $K \bmod \mathfrak{F}(K/k)$ 1. relativ-Galoissch über k ist, und daß 2. K der größte relativ-Abelsche Unterkörper von K^* ist. Die Untergruppe, zu der also K als Unterkörper von K^* gehört, ist die Kommutatorgruppe der Relativgruppe K^*/k . Also fallen nach Furtwängler und Artin (Abh. Hamb. math. Sem. 7) alle Klassen von k in K in die Hauptklasse nach K^* . Die 1. Behauptung, daß K^* über k Galoissch ist, ergibt sich aus der Invarianz des Geschlechtsmoduls gegenüber den Substitutionen der Relativgruppe K/k . Die 2. Behauptung, daß K der größte relativ-Abelsche Unterkörper von K^* ist, folgt für $\mathfrak{f} = 1$ bekanntlich aus der Tatsache, daß der absolute Klassenkörper der größte unverzweigte und zugleich Abelsche Oberkörper von k ist. (Vgl. Furtwängler, Göttinger Nachrichten 1906, 1907). Für allgemeines \mathfrak{f} wird dieser Satz auf den folgenden „Führersatz“ zurückgeführt, der somit den Hauptinhalt der Arbeit ausmacht: Ist K' ein relativ-Abelscher Oberkörper von k , der K enthält und über K relativ-zyklisch von Primzahlgrad ist, so folgt aus $\mathfrak{f}(K'/k) > \mathfrak{f}(K/k)$ die Beziehung in K : $\mathfrak{f}(K'/K) > \mathfrak{F}(K/k)$. Der Beweis dieses Satzes ergibt sich durch Untersuchung der Primidealpotenzen, die in dem Führer und Geschlechtsmodul eines relativ-Abelschen Körpers aufgehen. Tausky (Wien).

Scholz, Arnold: Die Abgrenzungssätze für Kreiskörper und Klassenkörper. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl. H. 20/21, 417–426 (1931).

Das Hauptergebnis der Arbeit ist der folgende „Abgrenzungssatz“: Die einem Körper K'/k nach einem beliebigen Modul \mathfrak{m} von k zugeordnete Idealgruppe H ist zugleich die Idealgruppe eines in K'/k enthaltenen Klassenkörpers K/k , und zwar ist dies zugleich der maximale Abelsche Teilkörper K von K'/k , wenn \mathfrak{m} durch den Führer von K/k teilbar ist. Dies folgt unmittelbar aus dem „Verlagerungssatz“ von Hasse: K/k sei Klassenkörper zur Idealgruppe H des Führers \mathfrak{f} von k , k'/k beliebig; dann ist Kk'/k' Klassenkörper zur Gruppe derjenigen zu \mathfrak{f} primen Ideale von k' , deren k -Normen in H liegen. Diesen Satz beweist der Verf. ganz kurz aus der Weberschen Definition des Klassenkörpers. Benutzt man den von Chevalley bewiesenen Verlagerungssatz für \wp -adische Zahlkörper, so erhält man den Abgrenzungssatz für \wp -adische Körper: Die einem \wp -adischen Relativkörper \bar{K}'/\bar{k} zugeordnete Zahlgruppe in k ist gleich der dem maximalen Abelschen Teilkörper \bar{K}/\bar{k} von \bar{K}'/\bar{k} zugeordneten Zahlgruppe. Für den Fall, daß der Grundkörper k der rationale Zahlkörper ist, kann der Abgrenzungssatz schärfer gefaßt werden: Der Klassenkörper K der Idealgruppe, die dem Körper K' nach einem (rationalen) Modul $\mathfrak{m} = m$ zugeordnet ist, ist der Durchschnitt von K' mit dem Kreiskörper K_m der m -ten Einheitswurzeln — „Abgrenzungssatz für Kreiskörper“. Dieser Satz wird noch als Aussage über die Primitale eines ganzzahligen Polynoms formuliert. Den Abgrenzungssatz der Kreiskörper verwendet der Verf. zu einer Vereinfachung des Satzes von Tschebotaröw, daß die Dichte der Primzahlen, die einer Substitutionsklasse eines Galoisschen Zahlkörpers zugeordnet sind, gleich der Dichte dieser Substitutionsklasse in der Galoisschen Gruppe ist. Mittels des allgemeinen Abgrenzungssatzes ist ein einfacher Beweis eines Zwischenresultats im Takagischen Aufbau der Klassenkörpertheorie möglich, nämlich der Behauptung, daß es zu jeder Idealgruppe vom Primzahlindex l eines Körpers k einen Klassenkörper gibt, wenn dies für solche Körper k richtig ist, welche die l -ten Einheitswurzeln enthalten. Deuring.

Suetuna, Zyoiti: Über die Anzahl der Idealteiler. J. of Fac. Sci. Univ. Tokyo I 2, 155—177 (1931).

Die Kenntnis der Arbeit von H. Hasse und Z. Suetuna über ein allgemeines Teilerproblem der Idealtheorie [J. of Fac. Sci. Univ. Tokyo I 2, 133—154 (1931); vgl. dies. Zbl. 2, 17] wird vorausgesetzt. Unter Verwendung der dortigen Bezeichnungen betrachtet Verf. zunächst die zahlentheoretischen Funktionen

$$A_1(x) = \sum_{\substack{T^c(a) \geq \frac{1}{N(a)} \\ N(a) \leq x}} 1, \quad B_1(x) = \sum_{N(a) \leq x} T^c(a),$$

deren Eigenschaften eine Einsicht in die Feinstruktur der $T(a)$ vermitteln; c ist eine beliebige feste positive Zahl. Andererseits sei P ein Unterkörper von Ω , n ein ganzes Ideal aus P , und

$$F(n) = \sum_{N_{\Omega/P}(a) = n} T(a), \quad a \subset \Omega.$$

Dann werde

$$A_2(x) = \sum_{\substack{F^c(n) \geq \frac{1}{N(n)} \\ N(n) \leq x}} 1, \quad B_2(x) = \sum_{N(a) \leq x} F^c(n)$$

gebildet. Das asymptotische Verhalten dieser zahlentheoretischen Funktionen wird, wie bei dem allgemeinen Teilerproblem der Idealtheorie, durch analytische Betrachtungen ermittelt, welche auf dem Umwege über die Darstellungstheorie der hier auftretenden Galoisgruppen zur Heranziehung der Artinschen L -Funktionen führen. Wie dort erhält man zunächst für die erzeugende Funktion von $A_1(x)$

$$Z(s) = \sum_{a \subset \Omega} \left(\frac{T^c(a)}{N(a)} \right)^s$$

im Gebiet $\sigma > 1$ eine Darstellung

$$Z(s) = \Phi_1(s) \exp \left\{ \sum_{i=1}^r \tau_i(c s) \log L(s; \chi_i) \right\};$$

hier ist $\Phi_1(s)$ für $\sigma > \frac{1}{2}$ regulär, für $s > \frac{1}{2}$ ungleich Null und bei festem $c > 0$ gleichmäßig beschränkt für $\sigma \geq \frac{1}{2} + \delta$, $\delta > 0$, ferner

$$\tau_i(cs) = \frac{1}{g} \sum_{S < \mathfrak{G}} k^{c s z(S)} \chi_i(S^{-1}).$$

Auf Grund dieser Tatsachen ergibt sich eine asymptotische Entwicklung für

$$A_1^*(x) = \sum_{\substack{T^c(a) \geq \frac{1}{N(a)} \\ N(a) \leq x}} \log \left(x \frac{T^c(a)}{N(a)} \right),$$

aus welcher sich die gewünschte Entwicklung

$$A_1(x) = x(\log x)^{\tau_1(c)-1} \left\{ \sum_{\mu=0}^{H-1} \sum_{\nu=0}^{\mu} a_{\mu\nu} \frac{(\log \log x)^{\nu}}{(\log x)^{\mu}} + O \left(\left(\frac{\log \log x}{\log x} \right)^H \right) \right\}$$

leicht gewinnen läßt. Dabei ist H eine beliebige feste natürliche Zahl. Auf demselben Wege erhält der Verf. die asymptotischen Entwicklungen, welche das Verhalten der Funktionen $B_1(x)$, $A_2(x)$, $B_2(x)$ betreffen. Z. B. ist

$$B_1(x) = x(\log x)^{\tau_1(c)-1} \left\{ \sum_{\mu=0}^{H-1} \frac{a_{\mu}}{(\log x)^{\mu}} + O \left(\frac{1}{(\log x)^H} \right) \right\}.$$

Eine wesentlich schärfere Abschätzung ergibt sich hier, wenn k^c ganz rational ist; denn dann sind die Zahlen $\tau_i(c)$, $1 \leq i \leq r$, selbst ganz rational und ≥ 0 , und hieraus folgt wie in der früheren Arbeit, daß sich die erzeugende Funktion dieses Problems bis auf einen für $\sigma > \frac{1}{2}$ regulären Faktor als Produkt Dedekindscher Zetafunktionen der Zwischenkörper zwischen Ω und K^* darstellen läßt. Diese schärfere Abschätzung lautet

$$B_1(x) = x \left(\sum_{\mu=0}^{\tau_1(c)-1} a_{\mu} (\log x)^{\tau_1(c)-\mu-1} \right) + O(x^{1-\vartheta_1} (\log x)^{\tau_1(c)-1})$$

mit $\vartheta_1 = \frac{2}{\omega k^c m + 1}$, wo ω den Absolutgrad von Ω angibt. — Zur Untersuchung der Funktionen $A_2(x)$ und $B_2(x)$ bezeichne P einen Unterkörper von Ω , K^* den durch K erzeugten

Galoisschen Oberkörper von Ω und \hat{K} den kleinsten K^* enthaltenden Galoisschen Körper über P . Sind \mathfrak{R} , \mathfrak{M} , \mathfrak{L} die Galoisgruppen von \hat{K}/P , \hat{K}/Ω , \hat{K}/K^* , so wird durch jeden einfachen Charakter χ_i von $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{M}/\mathfrak{L}$ ein einfacher Charakter $\hat{\chi}_{\chi_i}$ von \mathfrak{R} induziert, und Verf. beweist nun für jedes unverzweigte Primideal \mathfrak{p} von P die Beziehung:

$$F(\mathfrak{p}) = \sum_{i=1}^r \tau_i(1) \hat{\chi}_{\chi_i}(\mathfrak{p}).$$

Mit Hilfe dieser Gleichung läßt sich das ganze Verfahren auf die Funktionen $A_2(x)$ und $B_2(x)$ anwenden, und man erhält ganz analoge Entwicklungen wie für die ersten beiden Funktionen $A_1(x)$ und $B_1(x)$. Zum Schluß werden die hierbei auftretenden Charaktersummen nach Art der $\tau_i(c)$ diskutiert.

Petersson (Hamburg).

Lichtenbaum, P.: Über die Funktion $\chi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1)^{-s}$. Math. Z. 33, 641—647 (1931).

Es wird mittels einer von Wirtinger stammenden Methode die im Titel genannte L -Reihe untersucht und ihre Funktionalgleichung bewiesen. Wird $\Re s > 1$ vorausgesetzt, so ist die Funktion

$$\Phi(x, s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k x^{-\frac{1}{2}} (\log x + 2k\pi i)^{-s}$$

regulär für $|x| > 1$; sie besitzt die Laurent-Entwicklung

$$\Phi(x, s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\nu - \frac{1}{2})^{s-1}}{\Gamma(s)} x^{-\nu}.$$

Setzt man in diesen beiden Reihen $x = -1$, so ergibt sich bereits formal die Funktionalgleichung der L -Reihe, die unter Benutzung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial \Phi(x, s)}{\partial x} + \frac{1}{2x} \Phi(x, s) = -\frac{s}{x} \Phi(x, s+1)$$

streng bewiesen wird.

Hans Heilbronn (Göttingen).

Vaidyanathaswamy, R.: The theory of multiplicative arithmetic functions. Trans. amer. math. Soc. 33, 579—662 (1931).

Eine außerordentlich weitreichende Arbeit mit einer Fülle von Einzelergebnissen, die in diesem Referat nur zum geringen Teil angeführt werden können. Es sei gestattet, zu bemerken, daß in einer Arbeit des Ref. in den Wiener Sitzungsberichten 1918 bereits Gedankengänge in ähnlicher Richtung, jedoch mehr auf die additive Zahlentheorie angewendet, verfolgt worden sind; diese Arbeit scheint dem Verf. nicht bekanntgeworden zu sein.

I. Preliminary. Arithmetische Funktionen $f(M_1, M_2, \dots, M_r)$ heißen solche, die für alle positiven ganzzahligen Werte der Argumente erklärt sind. Sie heißen multiplikativ (bei Andern faktorel, zerlegbar), wenn (*) $f(M_1, M_2, \dots, M_r) f(N_1, N_2, \dots, N_r) = f(M_1 N_1, M_2 N_2, \dots, M_r N_r)$ ist, sobald die Produkte $M_1 M_2 \dots M_r$ und $N_1 N_2 \dots N_r$ teilerfremd sind. Für jede multiplikative Funktion ist $f(1, 1, \dots, 1) = 1$. Eine multiplikative Funktion ist bekannt, wenn für jede Primzahl p alle Werte $f(p^{a_1}, p^{a_2}, \dots, p^{a_r})$ bekannt sind. Diese Wertsysteme heißen die Elemente der multiplikativen Funktion. Sie sind voneinander unabhängig. Man kann sie in die „erzeugenden Reihen“ $\sum f(p^{a_1}, p^{a_2}, \dots, p^{a_r}) x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_r^{a_r}$ zusammenfassen (zu unterscheiden von den sonst meist gebrauchten Reihen $\sum f(n) x^n$). Eine multiplikative Funktion heißt linear, wenn die Beziehung (*) auch ohne die Voraussetzung der Teilerfremdheit der Argumente gilt. Eine solche Funktion läßt sich auf lineare Funktionen je eines einzigen Arguments zurückführen: $f(M_1, M_2, \dots, M_r) = f(M_1, 1, \dots, 1) f(1, M_2, \dots, 1) \dots f(1, 1, \dots, M_r)$. Die erzeugende Reihe zur Basis p ist hier einfach die Entwicklung von $\prod \frac{1}{1 - f(p) x_i}$. Als einfachste elementare Funktionen werden eingeführt: Die Funktionen $E_k(M) = k^\nu$, wo ν die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von M ist: $E_k(p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \dots, p_r^{a_r}) = k^\nu$, wo die p verschieden sind; die Funktionen $\lambda_k(p) = E_k(p) = k$, aber λ_k soll linear sein, also ist $\lambda_k(p_1 p_2 \dots p_r) = k^\nu$, wo die p gleich oder verschieden sein können; die Funktionen $I_k(M) = M^k$; die Funktionen $\pi_k(M)$, die 0 oder 1 sind, je nachdem M durch eine k -te Potenz teilbar ist oder nicht; die Funktionen $\varepsilon_k(M)$, die 1 oder 0 sind, je nachdem M eine k -te Potenz ist oder nicht. $I_k, \pi_k, \varepsilon_k$ sind ebenfalls lineare Funktionen. Für mehrere Argumente wird erklärt: $E_k(M_1, M_2, \dots, M_k) = E_k(M_1 M_2 \dots M_r)$ usw. Da λ_k eine lineare Funktion ist, so hat man auch $\lambda_k(M_1, M_2, \dots, M_k) = \lambda_k(M_1) \lambda_k(M_2) \dots \lambda_k(M_r)$ und ebenso für $I_k, \pi_k, \varepsilon_k$. Unter diesen Funktionen sind noch besonders hervorzuheben: die Funktion E_0 , die 1 ist, wenn alle Argumente 1 sind, sonst immer 0; die Funk-

tion E_1 (kurz E), die stets 1 ist; die Funktion λ_{-1} (kurz λ): $\lambda(p_1 p_2 \dots p_r) = (-1)^r$. Es gilt ferner $\pi_1 = \lambda_0 = E_0$; $\lambda_1 = \varepsilon_1 = I_0 = E$.

II. The processes of the calculus. Es werden gewisse Verknüpfungen betrachtet, die, auf multiplikative Funktionen angewendet, immer wieder multiplikative Funktionen liefern: 1. Multiplikation. Die Funktion, die für die Argumente M_1, M_2, \dots, M_r den Wert $f(M_1, M_2, \dots, M_r) \varphi(M_1, M_2, \dots, M_r)$ annimmt, wird mit $f \times \varphi(M_1, M_2, \dots, M_r)$ bezeichnet. Man hat $f \times E = f$, $f \times E_0 = E_0$. Sind die Faktoren linear, so ist das Produkt ebenfalls linear. Insbesondere sind, wenn L linear ist, $L \times L, L \times L \times L \dots$, wieder linear. Umgekehrt kann man L aus diesen Ausdrücken suchen, doch sind solche Wurzelfunktionen unendlich vieldeutig. 2. Konvolution (etwa Aufwicklung oder Zusammenrollung) von Argumenten. Die Summe $\sum f(M_1, M_2, M_3, \dots, M_r)$, erstreckt über alle $M_1 M_2 = M$, liefert eine neue Funktion $\varphi(M, M_3, \dots, M_r)$ mit einem Argument weniger. Dieser Vorgang kann fortgesetzt werden. Alle so entstehenden Ergebnisse heißen Konvolute von f . Werden alle Argumente konvolviert, so erhält man „das Konvolut“ von f . In etwas andern Sinne heißt r -tes Konvolut von φ die Funktion, die für eine r -te Potenz $M = N^r$ gleich $\varphi(N)$, sonst 0 ist. Bei der Konvolution werden die betreffenden Unbestimmten der erzeugenden Reihen identifiziert. 3. Zusammensetzung (Komposition). Sind $f_1(M_1, M_2, \dots, M_r)$ und $f_2(N_1, N_2, \dots, N_r)$ zwei multiplikative Funktionen mit gleichvielen Argumenten, so ist $f_1(M_1, M_2, \dots, M_r) \times f_2(N_1, N_2, \dots, N_r)$ eine multiplikative Funktion mit $2r$ Argumenten. Man wende auf diese den Vorgang der Konvolution, und zwar auf entsprechende Argumente an; dies ergibt eine multiplikative Funktion von r Argumenten, die $f_1 \cdot f_2$ genannt wird. Man hat $f_1 \cdot f_2(M_1, M_2, \dots, M_r) = \sum f_1(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r) f_2(M_1/\delta_1, M_2/\delta_2, \dots, M_r/\delta_r)$, die Summe auf alle Teiler δ_1 von M_1 , auf alle Teiler δ_2 von M_2 usw. erstreckt. Bei der Komposition werden die erzeugenden Reihen multipliziert. Statt $f \cdot f$ wird kurz f^2 gesetzt usw. $f \cdot E$ heißt das numerische Integral von f . $E^2(M) = \tau(M)$ ist die Anzahl der Teiler von M . Man hat $f \cdot E_0 = f$. Ist $f \cdot f^{-1} = E_0$, so heißt f^{-1} die inverse Funktion zu f , man setzt noch $(f^{-1})^r = (f^r)^{-1} = f^{-r}$, $f^0 = E_0$. Dann gilt stets $f^r \cdot f^s = f^{r+s}$. Die Konvolution ist distributiv in bezug auf die Multiplikation; die Komposition ebenfalls, wenn der Multiplikator eine lineare Funktion ist. Die Funktion von Möbius und Mertens, $\mu = E^{-1}$. Die Summe der k -ten Potenzen der Teiler, $\sigma_k = I_k \cdot E$. Die bekannte Funktion von Euler, $\varphi = I \cdot E^{-1}$. Es gilt ferner $\varepsilon_k \cdot \pi_k = E$, $E_{1-k} = E \cdot \lambda_k^{-1}$, $E_2 \cdot E^2 = E^2 \times E^2$. Hieraus folgen mehrere, insbesondere einige von Liouville herrührende Formeln. Die Komposition von Funktionen läßt sich mit der Multiplikation Dirichletscher Reihen in Zusammenhang bringen. Wird das t -te Konvolut von I_r mit $I_{r'}$ bezeichnet, so heißen $I_{r,t}$ und $I_{r',t}$ elementare Simplexfunktionen. Die Funktionen, die durch Komposition von α Faktoren vom Typus $I_{r,t}$ und von β Faktoren vom Typus $I_{r',t}$ entstehen, heißen Simplexfunktionen von der Struktur (α, β) . Durch Komposition von Simplexfunktionen entstehen immer wieder Simplexfunktionen. Konvolute von Simplexfunktionen sind ebenfalls wieder Simplexfunktionen derselben Struktur. Einige bekannte arithmetische Funktionen lassen sich als Kreuzungen (crosses) von elementaren multiplikativen Funktionen erhalten. Betrachtet man z. B. die Anzahl der Darstellungen als Summe von 2 Quadraten, wobei alle Summen außer $0^2 + M^2$, $M^2 + M^2$ doppelt zu zählen sind und bringt diese Funktion in die Gestalt $E \cdot \mathfrak{E}$, so hat \mathfrak{E} für die Primzahl 2 dasselbe Element wie E_0 , für Primzahlen $4k+1$ dieselben Elemente wie E , für Primzahlen

$4k-1$ dieselben Elemente wie λ , symbolisch: $\mathfrak{E} = \begin{Bmatrix} 2 & E_0 \\ 4k+1 & E \\ 4k-1 & \lambda \end{Bmatrix}$. 4. Verbindung (com-

pounding) von Funktionen eines einzigen Arguments. Die Summe $\sum f(\delta) F(M/\delta)$, erstreckt über alle Teiler δ von M , für die δ und M/δ teilerfremd sind („Blockteiler“ von M), bildet eine Funktion von M , die Verbindung (compound) von f und F heißt und $f \oplus F$ geschrieben wird. Ihre erzeugende Reihe ist die Summe der erzeugenden Reihen von f und F , vermindert um 1, so daß das Absolutglied wieder 1 wird. Die Operation der Verbindung ist in bezug auf die Multiplikation distributiv. Sie ist in bezug auf die Komposition quasidistributiv, d. h. es gilt $f \cdot (f_1 \oplus f_2 \oplus \dots \oplus f_r) = \sum (f \cdot f_i) \oplus (E_{1-k} \times f)$. Die Funktion $\text{conj } f = f \times E_{-1}$, die

Konjugierte von f , hat die Eigenschaft, daß $f \oplus \text{conj } f = E_0$ ist. Es ist $\text{conj } \text{conj } f = f$, $\text{conj } (f \times \varphi) = f \times \text{conj } \varphi = \text{conj } f \times \varphi$. Die Konjugierte einer Verbindung ist gleich der Verbindung der Konjugierten. Ferner ist $E_r \oplus E_s = E_{r+s}$, $E_r \times E_s = E_{rs}$, $\text{conj } E_r = E_{-r}$, $f \oplus f \oplus \dots \oplus f$ (r Glieder) $= f \times E_r$ und noch viele andre Formeln.

III. Rational functions of one argument. Durch Zusammensetzung von r linearen Funktionen entsteht eine ganze rationale Funktion vom Grade r . Ist f eine solche, so muß f^{-1} für alle Argumente, die durch eine r -te Potenz teilbar sind, verschwinden. Wird eine ganze rationale Funktion P_r vom Grade r mit der inversen einer ganzen rationalen Funktion Q_s vom Grade s komponiert, so entsteht eine rationale Funktion vom Grade (r, s) . P_r heißt die ganze, Q_s^{-1} die inverse Komponente. Rationale Funktionen vom Grade $(1,1)$, also der Form $L_1 \cdot L_2^{-1}$, heißen Totienten. Alle besprochenen Verknüpfungen, ausgenommen die Division, angewendet auf rationale Funktionen, erzeugen immer wieder rationale Funktionen. Totienten der Form $L_1 E^{-1}$ heißen abzählende Totienten (z. B. $\varphi(N)$), Totienten der Form

$E \cdot L_2^{-1}$ (die inversen der vorigen) Libellentotienten (level-totients). Ein solcher hat stets für die verschiedenen Potenzen einer Primzahl denselben Wert, daher der Name. Sind L_1, L_2 lineare Funktionen und $L_1 \times L_2 = L_{12}$, so gilt $L_1^r \times L_2^s = L_{12}^{r+s-1} \cdot (L_1^{-(r-1)} \times L_2^{-(s-1)})$; r und s bedeuten ganz positive Zahlen. Eine rationale Funktion heißt regulär, wenn sie entweder zu einer ganzen rationalen Funktion invers oder von der Form $T \times L^r$ ist, wo T eine Libellentotienten und L eine lineare Funktion bedeutet. Eine reguläre rationale Funktion kann als Verbindung von elementaren rationalen Funktionen dargestellt werden. Das Produkt regulärer rationaler Funktionen ist eine rationale Funktion.

IV. The cardinal, principal, and semiprincipal functions. Ableitung (derivate) einer multiplikativen Funktion $f(M_1, M_2, \dots, M_r)$ in bezug auf einen Satz M_1, M_2, \dots, M_r von Argumenten, $D_{M_1, M_2, \dots, M_r}(f)$ heißt die Funktion $f(1, 1, \dots, 1, M_{i+1}, \dots, M_r)$ der Argumente M_{i+1}, \dots, M_r . Sie ist wieder multiplikativ. Die Funktion $f(M_1, M_2, \dots, M_r)$ ist in bezug auf M_1, M_2, \dots, M_i multiplikativ, wenn $D_{M_1, M_2, \dots, M_i}(f) = E(M_{i+1}, \dots, M_r)$ ist. Eine Funktion, deren Ableitungen sämtlich E_0 sind, heißt Kardinalfunktion. Es genügt, dies an den Ableitungen $D_{M_i}(f)$ ($i = 1, 2, \dots, r$) festzustellen. Ein Produkt ist eine Kardinalfunktion, wenn es ein Faktor ist. Die Ableitungen einer Zusammensetzung aus einer Kardinalfunktion und einer andern Funktion sind gleich den Ableitungen dieser andern. Die inverse einer Kardinalfunktion ist ebenfalls eine Kardinalfunktion. Wenn 2 Funktionen die entsprechenden Ableitungen gemeinsam haben, so ist die eine gleich der Zusammensetzung der andern mit einer Kardinalfunktion. Bilden die Argumente einer Funktion eine Matrix, so kann man die Ableitung nach den Argumenten einer Spalte bilden (Spaltenableitung). Eine Funktion heißt Hauptfunktion (principal function), wenn sie verschwindet, sobald ungleiche Argumente vorkommen. Ist $f(M_1, M_2, \dots, M_r)$ eine Hauptfunktion, so heißt $\varphi(M) = f(M, M, \dots, M)$ die zu ihr äquivalente Funktion eines einzigen Arguments. φ und f bestimmen einander eindeutig. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $f(M_1, M_2, \dots, M_r)$ eine Funktion $\varphi(g)$ des größten gemeinsamen Teilers g der Argumente ist, ist die, daß f das Integral einer Hauptfunktion von r Argumenten ist, die mit $\varphi \cdot E^{-1}(M)$ äquivalent ist; ähnlich für Funktionen von Matrices. Es werden noch „semiprincipal functions“ eingeführt und Anwendungen auf Funktionen des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Argumente gemacht.

V. Compounding of functions of several variables. Für Funktionen von mehreren Argumenten wird wie in II (unter 4. Verbindung) gesetzt: $f \oplus \varphi(M_1, M_2, \dots, M_r) = \sum f(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r) \varphi(M_1/\delta_1, M_2/\delta_2, \dots, M_r/\delta_r)$, wobei die Summe über alle Teiler δ_i von M_i zu erstrecken ist. Gegen die Theorie der Verbindung bei Funktionen eines einzigen Arguments ergeben sich gewisse Verschiedenheiten, daher rührend, daß die Glieder mit den Blockfaktoren 1 hier mehr als einmal auftreten. Man kann diese Verschiedenheiten beseitigen, wenn man die soeben genannte Summe so bildet, daß kein Faktor irgendeines der δ zu irgendeinem andern δ teilerfremd ist (oder daß die von einander verschiedenen Primfaktoren bei allen δ dieselben sind). Beide Arten lassen sich noch als besondere Fälle einer noch allgemeineren Erklärung der Verbindung von Funktionen mehrerer Veränderlicher ansehen.

VI. The identical equation of the multiplicative function. Nach den früheren Sätzen läßt sich $f(M_1 N_1, M_2 N_2, \dots, M_r N_r)$ darstellen, indem man die Funktion $f(M_1, M_2, \dots, M_r) f(N_1, N_2, \dots, N_r)$ der $2r$ Argumente (in Matrixanordnung) $\begin{vmatrix} M_1, M_2, \dots, M_r \\ N_1, N_2, \dots, N_r \end{vmatrix}$

1. mit einer gewissen Kardinalfunktion C_1 multipliziert, 2. mit einer gewissen Kardinalfunktion C_2 zusammensetzt, 3. mit einer gewissen Kardinalfunktion C_3 verbindet. C_1, C_2, C_3 heißen die erste, zweite, dritte mit $f(M_1, M_2, \dots, M_r)$ assoziierte Kardinalfunktion. Die erste assoziierte Kardinalfunktion läßt sich mit Hilfe der eingeführten Operationen darstellen (die andern beiden nicht). Bezeichnet man mit $\text{erd } F$ die Funktion, die mit F übereinstimmt, nur daß die Funktionswerte, die bei einer Kardinalfunktion 0 sein müssen, in 0 verwandelt sind, so ist $C_1 = \text{conj } \text{erd } f^{-1}(M_1 N_1, M_2 N_2, \dots, M_r N_r)$, es gilt daher für jede multiplikative Funktion die Gleichung $f(M_1 N_1, M_2 N_2, \dots, M_r N_r) = f(M_1, M_2, \dots, M_r) f(N_1, N_2, \dots, N_r) \text{ conj } \text{erd } f^{-1}(M_1 N_1, M_2 N_2, \dots, M_r N_r)$, die sog. identische Gleichung von f . Für einen Totienten $T = L_1 \cdot L_2^{-1}$ mit einem einzigen Argument lautet die identische Gleichung: $T(MN) = L_1(M) L_1(N) \cdot \{L_2(l) \times L_1(g) \times \mu(M) \mu(N)\}$, dabei bedeutet l das kleinste gemeinsame Vielfache, g den größten gemeinsamen Teiler von M und N . Von E. Busche stammt die Formel $\sigma_a(M) \sigma_a(N) = \sum d^a \sigma_a(MN/d^2)$, die Summe erstreckt sich über alle gemeinsamen Teiler d von M und N ; Ramanujan hat die inverse Form dazu angegeben: $\sigma_a(MN) = \sum \sigma_a(M/d) \sigma_a(N/d^a \mu(d))$. Eine Funktion genügt einer Busche-Ramanujanschen Identität, wenn (***) $f(M_1 N_1, M_2 N_2, \dots, M_r N_r) = \sum f(M_1/\delta_1, M_2/\delta_2, \dots, M_r/\delta_r) \cdot f(N_1/\delta_1, N_2/\delta_2, \dots, N_r/\delta_r) F(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r)$ ist, die Summe erstreckt über alle gemeinsamen Teiler δ_i von M_i und N_i ($i = 1, 2, \dots, r$); F bedeutet dabei irgendeine (notwendigerweise multiplikative) Funktion der Argumente. Die Funktionen, die einer Busche-Ramanujanschen Identität genügen, lassen sich aufstellen. Die Totienten von r Argumenten T sind die einzigen Funktionen, deren zweite assoziierte Kardinalfunktion C_2 eine Hauptfunktion ist. $C_2 \cdot E$ ist der Libellentotient T' , für den $T \times T'$ eine lineare Funktion wird. Die dritte assoziierte Kar-

dinalfunktion C_3 wird eine Hauptfunktion nur in dem trivialen Falle, wo sie gleich E_0 ist, die multiplikative Funktion selbst ist dann eine lineare Funktion. Wenn (**) nur gilt, sobald M und N keinen gemeinsamen Blockfaktor haben, so wird dies die eingeschränkte Busche-Ramanujansche Identität genannt. Auch die Funktionen, die einer solchen genügen, lassen sich aufstellen.

VII. The theory of Smith's determinant. Eine Funktion $f(M_1, M_2, \dots, M_r)$ heißt Ordinalfunktion, wenn sie verschwindet, sobald gewisse Beziehungen der Form $M_i > M_j$ zutreffen. Bei multiplikativen Funktionen kann statt „ $M_i > M_j$ “ die Beziehung „ M_i kein Teiler von M_j “ treten. Eine Funktion $f(M_1, M_2, \dots, M_r)$, die 0 ist, sobald M_i größer ist als irgendeins der andern Argumente, heißt eine Kleinstordinalfunktion mit dem Kleinstargument M_i . Entsprechend wird eine Größtordinalfunktion mit dem Größtargument M_i erklärt. Eine Funktion $f(M_1, M_2, \dots, M_{r-1}, M)$, die sich nicht ändert, wenn zu M_1, M_2, \dots, M_{r-1} beliebige Vielfache von M addiert werden, hat den Modul M . Man hat $f(M_1, M_2, \dots, M_{r-1}, M) = F(g_1, g_2, \dots, g_{r-1}, M)$, wo g_i den größten gemeinsamen Teiler von M_i und M bedeutet und F eine Größtordinalfunktion mit dem Größtargument M ist. Ist $f(M, M_1, M_2, \dots, M_{r-1})$ eine Kleinstordinalfunktion mit dem Kleinstargument M , so heißt $f(M, M_1, M_2, \dots, M_{r-1}) = \varphi(M)$ der Kern von f . Die Zusammensetzung $S(M, M_1, \dots, M_{r-1})$ aus einer Kleinstordinalfunktion mit dem Kleinstargument M und einer beliebigen Funktion von M heißt eine Smithsche Funktion in bezug auf M . Es wird die Determinante r ten Ranges $|S(M, M_1, \dots, M_{r-1})|$ betrachtet; als Indizes dienen die r Argumente von S . Wenn im Sinne der Theorie der Determinanten höheren Ranges von Rice, Lecat und dem Verf. der Index von M ein vorzeichenbestimmender (signant) ist, so heißt die Determinante eine Smithsche Determinante. Der Wert einer Smithschen Determinante von der Ordnung n ist 0, wenn die Anzahl der vorzeichenbestimmenden Indizes ungerade ist (nach einer allgemeinen Eigenschaft), im andern Fall dagegen $F(1) F(2) \dots F(M)$, wo F der Kern der Funktion S , d. h. der darin auftretenden Ordinalfunktion ist. L. Schrutka (Wien).

Wigert, S.: Note sur deux fonctions arithmétiques. Prace mat.-fiz. 38, 23—29 (1931).

Verf. untersucht den Verlauf der zur Eulerschen Funktion $\varphi(n) = n \prod_{p|n} (1 - 1/p)$ analogen zahlentheoretischen Funktion $\psi(n) = n \prod_{p|n} (1 + 1/p)$, ferner der Funktion $q(n) = \varphi(n)/\psi(n)$. Er beweist die Abschätzungen

$$\sum_{n \leq x} \psi(n) = \frac{15}{2\pi^2} x^2 + O\left(\frac{x \log x}{\log \log x}\right), \quad (1)$$

$$\sum_{n \leq x} \frac{\psi(n)}{n} = \frac{15}{\pi^2} x - \frac{3}{\pi^2} \log x + O\left(\frac{\log x}{\log \log x}\right), \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q(n) (\log \log n)^2 = \frac{\pi^2}{6} e^{-2\gamma} \quad (3)$$

(γ ist die Eulersche Konstante), ferner

$$\sum_{n \leq x} q(n) = x \prod_p \left(1 - \frac{2}{p(p+1)}\right) + O(x^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{3}{2}} x). \quad (4)$$

(1) und (2) sind um so bemerkenswerter, als man die entsprechenden Summen mit $\varphi(n)$ nicht mit der gleichen Genauigkeit abschätzen kann. (1) und (2) folgen aus den von Walfisz herrührenden Abschätzungen [Math. Z. 26, 66—88 (1927)]

$$\sum_{n \leq x} S(n) = \frac{\pi^2}{12} x^2 + O\left(\frac{x \log x}{\log \log x}\right)$$

bzw.

$$\sum_{n \leq x} \frac{S(n)}{n} = \frac{\pi^2}{6} x - \frac{1}{2} \log x + O\left(\frac{\log x}{\log \log x}\right),$$

wobei $S(n) = \sum_{d|n} d$, mit Hilfe der Identitäten

$$\sum_{n \leq x} \psi(n) = \sum_{n \leq x} \mu(n) \sum_{m \leq x/n^2} S(m), \quad \sum_{n \leq x} \frac{\psi(n)}{n} = \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n^2} \sum_{m \leq x/n^2} \frac{S(m)}{m}.$$

Der Beweis von (3) ist elementar (Tschebyschef-Mertenssche Ungleichungen); (4) wird nach einer Untersuchung der entsprechenden erzeugenden Funktion

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q(n)}{n^s} = \zeta(s) \prod_p \left(1 - \frac{2}{p^s(p+1)}\right)$$

mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes bewiesen.

Kalmár (Szeged).

Salié, Hans: Über die Kloostermanschen Summen $S(u, v; q)$. Math. Z. **34**, 91–109 (1931).

Verf. untersucht die Summe

$$S(u, v; q) = \sum_{\substack{0 < h \leq q \\ (h, q) = 1}} e^{\frac{2\pi i}{q}(u\bar{h} + v\bar{h})},$$

wo u, v, q natürliche Zahlen sind, h ein teilerfremdes Restsystem mod q durchläuft und \bar{h} eine natürliche Zahl ist, die der Bedingung $h\bar{h} \equiv 1 \pmod{q}$ genügt. Ist $q = p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r}$ die kanonische Primzahlzerlegung, so gibt es zu u und v Zahlen v_1, \dots, v_r derart, daß

$$S(u, v; q) = \prod_{r=1}^r S(u, v_r; p_r^{m_r})$$

ist. Da ferner

$$S(u, v; q) = S(v, u; q),$$

$$S(u, v; q) = p S\left(\frac{u}{p}, \frac{v}{p}; \frac{q}{p}\right) \quad \text{für } p \mid (u, v, q)$$

und

$$S(u, v; q) = S(1, uv; q) \quad \text{für } (u, q) = 1,$$

genügt es $S(1, \lambda; q)$ zu untersuchen, wenn $q = p^m$ (Primzahlpotenz) ist. Für $p \geq 3$, $m \geq 2$ läßt sich dieser Ausdruck auf Gaußsche Summen zurückführen und daher in geschlossener Form summieren. Das Ergebnis hängt wesentlich davon ab, ob λ quadratischer Rest oder Nichtrest mod q ist. Als Abschätzung erhält man: $|S(1, \lambda; q)| < 2\sqrt{q}$. Für $p = 2$ müssen ähnliche Überlegungen durchgeführt werden, und es ergibt sich $|S(1, \lambda; q)| \leq 2^{3/2}\sqrt{q}$. Ist q eine ungerade Primzahl, so gelingt eine direkte Summation nicht; doch stellt Verf. verschiedene Identitäten auf, u. a.

$$\sum_{\lambda=0}^{q-1} S(1, \lambda; q)^4 = 2q^3 - 3q^2 - 3q,$$

woraus, da $S(1, \lambda; q)$ reell ist, $|S(1, \lambda; q)| < 2^{1/4}q^{3/4}$ folgt. Heilbronn (Göttingen).

Carmichael, R. D.: On the representation of integers as sums of an even number of squares or of triangular numbers. Ann. of Math., II. s. **32**, 299–305 (1931).

Die Arbeit knüpft an die von Ramanujan eingehend untersuchten Summen

$$c_q(n) = \sum_{\lambda} \cos \frac{2\pi\lambda n}{q}, \quad s_q(n) = \sum_{\lambda} (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \sin \frac{2\pi\lambda n}{q}$$

an, wo q eine natürliche, n eine beliebige ganze rationale Zahl bezeichnet und λ die zu q teilerfremden positiven ganzen Zahlen durchläuft, die $\leq q$ sind. Für positives ganzes s sei

$$\gamma_q(n) = c_q(n) \cos \frac{\pi s(q-1)}{2} - s_q(n) \sin \frac{\pi s(q-1)}{2};$$

ferner bedeute $r_{2s}(n)$ die Anzahl der Darstellungen von n als Summe von $2s$ Quadraten, $\delta_{2s}(n)$ die Funktion

$$\delta_{2s}(n) = \frac{\pi^s n^{s-1}}{(s-1)!} g_s(n),$$

wo für $s > 1$

$$g_s(n) = \frac{\gamma_1(n)}{1^s} + \frac{\gamma_4(n)}{2^s} + \frac{\gamma_9(n)}{3^s} + \frac{\gamma_{16}(n)}{4^s} + \dots,$$

während $g_1(n)$ die Hälfte des Wertes der rechten Seite für $s = 1$ bedeuten soll, und $\Sigma_{r,s}(n)$ die Funktion

$$\Sigma_{r,s}(n) = \sigma_r(0) \sigma_s(n) + \sigma_r(1) \sigma_s(n-1) + \dots + \sigma_r(n) \sigma_s(0),$$

wo $\sigma_r(n) = \sum_{d|n} d^r$ für $n > 0$ und $\sigma_r(0) = \frac{1}{2} \zeta(-r)$. Dann beweist der Verf. die asymptotischen Relationen

$$\frac{1}{m} \sum_{n=1}^m \gamma_{\varrho}(n) n^{1-s} \delta_{2s}(n) = \frac{\pi^s \varepsilon_{\varrho}(s) \varphi(\varrho)}{(s-1)! \varrho^s} + O\left(\frac{1}{m}\right),$$

$$\frac{1}{m} \sum_{n=1}^m \gamma_{\varrho}(n) n^{1-s} r_{2s}(n) = \frac{\pi^s \varepsilon_{\varrho}(s) \varphi(\varrho)}{(s-1)! \varrho^s} + O\left(\frac{1}{m}\right),$$

wo ϱ positiv ganz, $s > 3$ ganz und $\varepsilon_{\varrho}(s) = 1, 0, 2^s$, je nachdem ob ϱ ungerade oder $\equiv 2$ oder $\equiv 0 \pmod{4}$ ist. Die entsprechenden Formeln für die Anzahl der Darstellungen von n durch $2s$ Dreieckszahlen werden nicht ganz ausgeführt. Ferner beweist er für positive ungerade r, s und positives ganzes ϱ die entsprechende Formel

$$\frac{1}{m} \sum_{n=1}^m c_{\varrho}(n) n^{-r-s-1} \Sigma_{r,s}(n) = \frac{r! s!}{(r+s+1)!} \cdot \frac{\zeta(r+1) \zeta(s+1)}{\varrho^{r+s+2}} \cdot \varphi(\varrho) + O\left(\frac{\log m}{m}\right).$$

Bessel-Hagen (Bonn).

Corput, J. G. van der, und J. Popken: Über den kleinsten Wert einiger quadratischer Formen. I. Proc. roy. Acad. Amsterd. **34**, 615–630 (1931).

Es werden für einige spezielle quadratische Formen scharfe Abschätzungen von der Form $\sum_{r,s=1}^m e_{rs} u_r u_s \geq A u_m^2$ gegeben (alle vorkommenden Zahlen sind reell). Z. B. wird bewiesen: für $\alpha > -2$ ist

$$\sum_{r,s=1}^m \Gamma(\alpha + r + s) u_r u_s \geq (m-1)! \Gamma(\alpha + 1 + m) u_m^2. \quad (1)$$

Beweisskizze: Es sei $D_n (1 \leq n \leq m)$ die Determinante n -ter Ordnung mit den Elementen $\Gamma(\alpha + r + s) (r, s = 1, 2, \dots, n)$; $D_0 = 1$. Aus früheren Resultaten v. d. Corputs [Over eenige determinanten, Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Afdeling Natuurkunde (eerste sectie), Deel XIV, No 3 (1930)] folgt

$$D_n > 0, \quad (2) \quad D_m/D_{m-1} = (m-1)! \Gamma(\alpha + 1 + m). \quad (3)$$

Also ist stets

$$\sum_{r,s=1}^m \Gamma(\alpha + r + s) u_r u_s - \frac{D_m}{D_{m-1}} u_m^2 \geq 0; \quad (4)$$

denn die Kette der Haupt-Unterdeterminanten der Form links ist

$$D_0 > 0, \quad D_1 > 0, \dots, D_{m-1} > 0, \quad D_m - \frac{D_m}{D_{m-1}} D_{m-1} = 0.$$

Aus (3), (4) folgt aber (1). Aus (1) folgt noch als einfaches Korollar: für $\alpha > -\frac{3}{2}$ ist

$$\sum_{r,s=1}^m \binom{2\alpha + r + s}{\alpha + r} u_r u_s \geq \frac{\binom{2\alpha + 2m}{\alpha + m}}{\binom{2\alpha + 2m}{m-1}} u_m^2.$$

Durch ähnliche, aber längere Überlegungen werden analoge Resultate für die Formen

$$\sum_{r,s=1}^m \Gamma(\alpha - r - s) u_r u_s, \quad \sum_{r,s=1}^m \frac{u_r u_s}{\Gamma(\alpha - r - s)}, \quad \sum_{r,s=1}^m \frac{u_r u_s}{\Gamma(\alpha + r + s)},$$

$$\sum_{r,s=1}^m \Gamma(\alpha + r + s) \Gamma(\beta - r - s) u_r u_s$$

nebst zugehöriger Korrolare bewiesen (mit geeigneten Nebenbedingungen für α, β). Druckfehler: in der Formel (49) lies $\beta + 1 + m$ statt $\beta + 1 - m$. Jarník (Praha).

Analysis.

Reihen:

Naylor, V., and S. G. Hersley: Note on the summation of certain series. J. Lond. math. Soc. **6**, 218—219 (1931).

Cioraneseu, N.: Sur la sommation des séries trigonométriques. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. **13**, 577—582 (1931).

Ein Beitrag zu der Riemannschen Theorie der trigonometrischen Reihen. Es seien

$$L_1(\alpha) = \alpha^{-2} \Delta F = \alpha^{-2} [F(x + \alpha) - 2F(x) + F(x - \alpha)],$$

$$L_2(\alpha) = \alpha^{-2} D F = 6 \alpha^{-2} \left[(2\alpha)^{-1} \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} F(t) dt - F(x) \right].$$

Der Verf. führt den Limesprozeß $\lim_{\alpha \rightarrow 0} L_2(\alpha)$ ein, der dem bekannten Riemannschen

Ausdruck $\lim_{\alpha \rightarrow 0} L_1(\alpha)$ ähnlich ist und wie dieser nur für lineare Funktionen identisch

verschwindet. Es sei $F(x)$ durch zweimalige Integration einer trigonometrischen Reihe mit gegen Null konvergierenden Koeffizienten entstanden. Der Verf. zeigt, daß sein Limesprozeß auf $F(x)$ angewandt zu einem konvergenzerhaltenden Summationsverfahren der gegebenen Reihe führt. Er untersucht auch Ausdrücke der Form $\lambda_1 L_1(\alpha) + \lambda_2 L_2(\alpha)$ mit $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ und zeigt, daß $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \{\lambda_1 L_1(\alpha) + \lambda_2 L_2(\alpha)\}$

existieren kann, ohne daß $\lim L_1(\alpha)$ und $\lim L_2(\alpha)$ zu existieren brauchen. Der Verf. betont, daß die Konvergenzfaktoren der Riemannschen Methode und diejenigen seiner Methode

$$2(n\alpha)^{-2} [1 - \cos n\alpha] \quad \text{bzw.} \quad 6(n\alpha)^{-3} [n\alpha - \sin n\alpha]$$

sind. Es ist in diesem Zusammenhang vielleicht von Interesse zu bemerken, daß die Funktionen

$$\varphi_m(u) = (-1)^m (2m)! u^{-2m} \left[\cos u - \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \frac{u^{2k}}{(2k)!} \right]$$

und

$$\psi_m(u) = (-1)^m (2m+1)! u^{-2m-1} \left[\sin u - \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \frac{u^{2k+1}}{(2k+1)!} \right]$$

für $u = n\alpha$, $m = 1, 2, 3, \dots$ ganz allgemein brauchbare Konvergenzfaktorenfolgen liefern. Die Riemannschen Faktoren entstehen aus $\varphi_1(u)$, diejenigen des Verf. aus $\psi_1(u)$. Die Lebesguesche Faktorenfolge entspricht $\psi_0(u)$, ist aber nur für trigonometrische Reihen zugeschnitten.

Hille (Princeton, N. J.).

Hille, Einar, and J. D. Tamarkin: On the summability of Fourier series. IV. Proc. nat. Acad. Sci. U.S.A. **17**, 376—380 (1931).

Bericht über weitere Untersuchungen betreffend die $[H, q(u)]$ -Summierbarkeit einer Fourierschen Reihe, ihrer konjugierten Reihe und deren Derivierter. Dabei heißt eine Folge (s_n) $[H, q(u)]$ -summierbar, wenn die Folge

$$T_n = \sum_0^n s_\nu \binom{n}{\nu} \int_0^1 u^\nu (1-u)^{n-\nu} dq(u)$$

konvergiert; $q(u)$ ist eine Funktion von beschränkter Schwankung.

Szász.

Hardy, G. H.: The summability of a Fourier series by logarithmic means. Quart. J. Math., Oxford ser. **2**, 107—112 (1931).

Let s_n be an arbitrary sequence and $S_n = s_1 + s_2/2 + \dots + s_n/n$. This sequence is summable by Riesz logarithmic means, or $(R, 1)$ summable, if the limit $s = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n / \log n$ exists. The following theorem is proved, giving an extension of previous results by Zygmund (Bull. Ac. Pol. **1924**, 243—250; **1925**, 207—218) and by

Jacob (Ibidem, 1927, 287—294): Let $f(x) \subset L$, $\varphi(t) \equiv 1/2 [f(x+t) + f(x-t) - 2s]$. Suppose that

$$\Phi(t) \equiv \int_0^t |\varphi(u)| du = o(t \log 1/t). \quad (\dagger)$$

Then a necessary and sufficient condition that the Fourier series of $f(x)$ should be $(R, 1)$ summable to s at the given point x , is that

$$\psi(t) \equiv \int_t^\pi \frac{\varphi(u)}{u} du = o(\log 1/t). \quad (*)$$

Condition (*) is more general than condition (**) $\int_0^t \varphi(u) du = o(t)$ of Zygmund.

It is satisfied whenever $f(t)$ is bounded near $t = x$, e. g. when $f(t) = \cos(a \log |t|)$, $a > 0$, while (**) is not satisfied by this function. Condition (*) might be characterized as that of „continuity $(R, 1)$ of $f(t)$ at $t = x$ “. The theorem above might be stated then in a more striking form: Continuity $(R, 1)$ is a necessary and sufficient condition for summability $(R, 1)$ of the F. S. of $f(x)$, whenever (\dagger) is satisfied. It is worth while of observing that the preceding results do not hold for a slightly modified definition of summability, „harmonic means“, where s_n is given by $s_1/n + \dots + s_n$. It is readily proved [Hille and Tamarkin, Proc. Nat. Ac. of Sc., 14, 915—918 (1928)] that harmonic means fail to sum the F. S. even of a continuous function. *Tamarkin.*

Verblunsky, S.: A uniqueness theorem for trigonometric series. Quart. J. Math., Oxford ser. 2, 81—89 (1931).

This paper is a continuation of a previous paper by the author [Proc. Lond. math. Soc., II. s., 31, 370—386 (1930)] and is related to a paper by Zygmund [Math. Zeit. 25, 274—290 (1926)] whose results it extends. The following theorem is proved: Let the series

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad a_n = o(n), \quad b_n = o(n) \quad (1)$$

have its upper and lower Poisson sums $\bar{P}(x)$, $P(x)$ finite at every point, and let $\bar{P}(x) \equiv \psi(x)$ where $\psi(x)$ is integrable in the sense of Denjoy-Perron in $(0, 2\pi)$. Then (1) is a Fourier series. If

$$P(r, x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n$$

then the result remains true when the Poisson sums are not finite at the points of an enumerable set E , provided that for $x \subset E$, the condition $\lim_{r \rightarrow 1} (1-r) P(r, x) = 0$ is satisfied.

J. D. Tamarkin (Providence).

Fekete, M.: Sur des suites de facteurs conservant la classe d'une série de Fourier et aussi même de certaines propriétés individuelles locales de la fonction correspondante. C. r. Acad. Sci. Paris 193, 16—19 (1931).

It is well known that a necessary and sufficient condition that the factor sequence $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ preserve the class l_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) of the Fourier series $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, in the sense that the transformed series $f_\lambda(x) \sim \frac{a_0 \lambda_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ would belong to the same class as $f(x)$, is that the series $l(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n \sin nx}{n}$ shall be the Fourier series of a function of bounded variation

(here l_i designates, respectively, the class of functions: L integrable, bounded, R integrable, continuous, of bounded variation, absolutely continuous). As a continuation of a preceding note [C. r. 190, 1486 (1930)] the author shows that the condition that $l(x)$

have a continuous derivative $l'(x)$ at all points $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, while, at $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$, the limits $l'(x+0)$ and $l'(x-0)$ coincide, — is necessary and sufficient that the factor sequence $\{\lambda_n\}$ not only preserve l_5 , but also preserve the continuity or removable discontinuity of the derivative $f'(x)$, at all points where this derivative is continuous or presents a removable discontinuity.

J. D. Tamarkin (Providence, R.I., U.S.A.)

Berry, Andrew C.: The Fourier transform identity theorem. *Ann. of Math.* II. s. 32, 227—232 (1931).

Die Richtung, in der sich die vorliegende Untersuchung bewegt, wird durch den folgenden Satz gekennzeichnet: Wenn $f(x)$ eine Fouriersche Transformierte $F(x)$ mit endlichem $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)|^{\varrho} dx$ für ein gewisses $\varrho \geq 1$ besitzt, ferner $F(x)$ eine Fouriersche Transformierte $\mathfrak{F}(x)$ mit endlichem $\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathfrak{F}(x)|^{\mu} dx$ für ein gewisses $\mu \geq 1$, dann ist fast überall $\mathfrak{F}(x) = f(-x)$.

R. Schmidt (Kiel).

Differentialgleichungen :

Scorza Dragoni, Giuseppe: Il problema dei valori ai limiti studiato in grande per le equazioni differenziali del secondo ordine. *Math. Annalen* 105, 133—143 (1931).

Die Frage nach der Existenz von Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung $y'' = f(x, y, y')$, für die $y(x_0) = y_0$ und $y(x_1) = y_1$ fest vorgeschrieben ist und wobei über die Kleinheit von $x_1 - x_0$ keine Voraussetzung gemacht wird, ist bisher nicht in befriedigender Weise beantwortet worden. Verf. gibt nun eine Reihe von Bedingungen an, die die Existenz einer solchen Lösung sicherstellen. Aus der großen Anzahl der angegebenen hinreichenden Kriterien, die leider alle sehr einschneidende Voraussetzungen darstellen, greife ich folgenden Satz heraus: Wenn $f(x, y, y')$ in dem durch $\bar{x}_0 \leq x \leq \bar{x}_1$, $\bar{y}_0(x) \leq y \leq \bar{y}_1(x)$, $-\infty < y' < +\infty$ definierten Zylinder Z stetig und beschränkt ist und dort bezüglich z und z' der Lipschitzbedingung genügt und wenn ferner $\bar{y}_0(x)$, $\bar{y}_1(x)$ Lösungen von $y'' = f$ sind, so besitzt diese Differentialgleichung immer eine Lösung $y(x)$ für die $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ gilt, wenn nur x_0, y_0, x_1, y_1 der „Basis“ des Zylinders Z angehören.

Rellich (Göttingen).

Kourensky, M.: Sur la variation des constantes arbitraires pour les intégrales des équations linéaires ordinaires du deuxième ordre. *C. r. Acad. Sci. Paris* 192, 1627 bis 1629 (1931).

Um die allgemeine Lösung einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung im inhomogenen Falle aus vorgegebenem Fundamentalsystem für die homogene Gleichung zu gewinnen, wird die Methode der Variation der Konstanten in etwas abgeänderter Form verwendet. Die dabei auftretenden Quadraturen können dabei unter Umständen einfacher ausfallen, als das beim üblichen Verfahren der Fall ist.

Rellich (Göttingen).

Bristow, Leonard: Expansion theory associated with linear differential equations and their regular singular points. *Trans. amer. math. Soc.* 33, 455—474 (1931).

Es wird für gewöhnliche Differentialgleichungen n -ter Ordnung von der Form $L[y] + \lambda x^{-1}y = 0$, wobei

$$L[y] = x^{n-1}y^{(n)} + x^{n-2}\alpha y^{(n-1)} + \sum_{\nu=2}^n x^{n-\nu-1}p_{\nu}(x)y^{(\nu)}$$

ist, eine Eigenwerttheorie im Komplexen entwickelt. Die Koeffizienten $p_{\nu}(x)$ sind eindeutige analytische Funktionen in einem Kreis $|x| < F$, so daß die Differentialgleichung im Nullpunkt eine Singularität besitzt. Als Nebenbedingungen werden gewisse lineare homogene Beziehungen zwischen den Werten $y(a), y'(a), \dots, y^{(n-1)}(a)$ einer Lösung $y(x)$ im Punkte a und den entsprechenden Werten $Y(a), Y'(a), \dots, Y^{(n-1)}(a)$, die sich durch analytische Fortsetzung um den Nullpunkt ergeben, gestellt, insbesondere die Randbedingungen $y^i(a) = kY^i(a)$. Diesem Eigenwertproblem ist ein adjungiertes Problem zugeordnet für die adjungierte Differentialgleichung

$M[v] + \lambda x^{-1}v = 0$ mit den Randbedingungen $v^i(a) = \frac{1}{k} V^i(a)$. Es existiert eine unendliche abzählbare Folge von Eigenwerten λ_m mit den Eigenfunktionen $y_m(x)$ und $v_m(x)$, für die bei geeigneter Normierung die Orthogonalitätsrelationen

$$\int v_{-m}(x) y_s(x) x^{-1} dx = \begin{cases} 0, & m \neq s \\ 2\pi i, & m = s \end{cases}$$

bestehen. Das asymptotische Verhalten dieser Eigenfunktionen für große Werte von m wird durch die Relation

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{y_m(x)}{x^{\alpha_m}} = 1$$

gekennzeichnet, wobei α_m festbestimmte Zahlen sind. Auf Grund dieser Limesrelation ergeben sich sodann Sätze über die Möglichkeit der Entwicklung einer in der Umgebung des Nullpunktes regulären analytischen Funktion $f(x)$ in eine Reihe der Form $\sum a_m y_m(x)$.
Lüneburg (Göttingen).

Carrus, S.: Intégration des systèmes d'équations différentielles linéaires d'ordres quelconques, à coefficients quelconques. J. École polytechn. Paris, II. s. H. 28, 65 bis 107 (1931).

Es handelt sich um die Aufgabe, alle Lösungen eines Systems von m gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen beliebiger Ordnungen mit n ($m \geq n$) gesuchten Funktionen integrallos mit Hilfe willkürlicher Funktionen darzustellen. Der Autor setzt seine Methode zunächst im Falle einer einzigen Differentialgleichung mit zwei gesuchten Funktionen auseinander. Sie ist ganz elementar und besteht darin, daß durch geeignete lineare Substitutionen neuer abhängiger Veränderlicher und Integration die Differentiationsordnung von einer der beiden gesuchten Funktionen schrittweise auf Null herabgedrückt wird, woraus sich die verlangte Darstellung ergibt. Dann werden Systeme mit drei und vier unbekannten Funktionen untersucht; der allgemeine Fall wird jedoch nicht behandelt. Zum Schluß wird ein Beispiel einer nichtlinearen Differentialgleichung mit drei gesuchten Funktionen gebracht: es werden alle Raumkurven angegeben, deren Tangenten einem linearen Komplex angehören.
Rellich (Göttingen).

Doole, H. P.: A certain multiple-parameter expansion. Bull. amer. math. Soc. 37, 439—446 (1931).

The author considers the problem of expanding an arbitrary function $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ in terms of the characteristic solutions of the differential system,

$$X'_j + \left[\sum_{k=1}^j \lambda_k a_{jk}(x_j) - \sum_{k=j+1}^n a_{jk}(x_j) \right] X_j = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$X'_n + \sum_{k=1}^n \lambda_k a_{nk}(x) X_n = 0,$$

$$X_j(a) = \gamma_j X_j(b), \quad (\gamma_j > 0),$$

where the $a_{ij}(x)$ are functions which are either positive or zero in the region $(-a \leq x_j \leq b)$. By means of an adaptation of G. D. Birkhoff's method of contour integration as extended by C. C. Camp [Amer. J. of Math., 50, 259 (1928)], the author

proves that there exists an expansion of the form $\sum_{m,j} C_{mj} \prod_1^n X_j^*$, ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$),

where X_j^* is a characteristic solution of the j th equation of the system, which converges in the mean to $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ within $(-a, b)$, provided $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ consists of a finite number of pieces, each real, continuous and possessing a continuous partial derivative in each variable in the region $(-a \leq x_j \leq b)$. H. T. Davis (Bloomington).

Pfeiffer, G.: Sur la relation réciproque entre deux systèmes en involution d'équations linéaires. C. r. Acad. Sci. Paris 193, 284—285 (1931).

Vorgelegt sind zwei Involutionssysteme (A) und (B) von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung. Das durch Vereinigung der Gleichungen von (A) und

(B) entstehende System heiße (S). Dann wird ein Kriterium dafür abgeleitet, wann die unabhängigen Gleichungen von (S) ein vollständiges System bilden. *Rellich*.

Gerf, G.: Sur les caractéristiques des systèmes en involution d'équations aux dérivées partielles. C. r. Acad. Sci. Paris **192**, 1524—1525 (1931).

Es werden Systeme von partiellen Differentialgleichungen n -ter Ordnung von m unabhängigen Variablen betrachtet, die in Involution liegen. Insbesondere Systeme dieser Art mit der weiteren Eigenschaft, daß zu irgendeiner Integralfläche eine unendliche Mannigfaltigkeit anderer Integralflchen existiert, die die betrachtete Integralfläche längs einer Charakteristik von einer Ordnung kleiner als n berühren. Es wird eine allgemeine Methode entwickelt, solche Systeme zu konstruieren. *Lüneburg*.

Scheffer, M.: ber die Bestimmung einer Integralfläche einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, welche eine gegebene Fläche längs einer Kurve berührt. Huygens math. Tijdschr. **9**, 276—284 (1931) [Holländisch].

Saltikov, N.: Integration partieller Differentialgleichungen mittels der Methode der Variation der Konstanten. Zap. russk. naun. Inst. Belgrad Liefg **4**, 33—44 (1931) [Russisch].

Bergmann, Stefan: Ein Näherungsverfahren zur Lösung gewisser partieller, linearer Differentialgleichungen. (Inst. f. Angew. Math., Univ. Berlin.) Z. angew. Math. u. Mech. **11**, 323—330 (1931).

Im Gegensatz zum Ritzschen Verfahren kann man zur angenäherten Lösung von Randwertproblemen Approximationsfunktionen verwenden, die exakte Lösungen der entsprechenden Differentialgleichung sind, dafür aber die gestellten Randbedingungen nur angenähert befriedigen. Der Autor führt diese Methode bei dem Eigenwertproblem

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} - 2\tau \frac{\partial w_2}{\partial y} &= 0, \\ 2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + 2\tau \frac{\partial w_1}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

$w_1 = w_2 = 0$ auf dem Rande eines Rechteckes, mit allen numerischen Einzelheiten durch. Als Maß der Annäherung der Randwerte wird das Integral über die Summe der Quadrate der Funktionen gewählt. Die Frage nach der Konvergenz der Approximationsfunktionen ist beiseite gelassen. *Rellich* (Göttingen).

Hopf, Eberhard: Kleine Bemerkung zur Theorie der elliptischen Differentialgleichungen. J. f. Math. **165**, 50—51 (1931).

Nach S. Bernstein ist jede in der ganzen x, y -Ebene zweimal stetig differenzierbare und beschränkte Lösung der Differentialgleichung $L(u) = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = 0$, $ac - b^2 > 0$, $a > 0$ (mit überall stetigen a, b, c) eine Konstante. Der Satz wird falsch, wenn man „beschränkt“ durch „positiv“ ersetzt. (Gegenbeispiel des Verf. $a = 1 + e^y$, $b = 1$, $c = e^{-y}$, $u = e^{x-e^y}$). Jedoch kann Verf. folgenden Satz beweisen: Für $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$ gelte $a \rightarrow a^*$, $b \rightarrow b^*$, $c \rightarrow c^*$ mit $a^*c^* - b^{*2} > 0$, $a^* > 0$. ber die Konvergenzgeschwindigkeit sei $|a - a^*|$, $|b - b^*|$, $|c - c^*| = O(r^{-\lambda})$ mit konstantem $\lambda > 0$ vorausgesetzt. Dann ist jede in der ganzen Ebene positive zweimal stetig differenzierbare Lösung von $L(u) = 0$ eine Konstante. *Rellich* (Göttingen).

Bouligand, Georges: Sur les ensembles impropres dans le problème de Dirichlet pour une équation du type elliptique à coefficients singuliers. Bull. Acad. roy. Belg., Cl. Sci., V. s. **17**, 40—42 (1931).

Les ensembles impropres sont certains sous-ensembles de la frontière, qu'on peut dans le problème de Dirichlet supprimer avec les données qu'il portent sans altérer la solution (voir les mémoires de l'auteur: Sur le probleme de Dirichlet — Ann. Soc. Pol. Math. **1925**, 80, et Ensembles impropres et nombre dimensionnel — Bull. des Sciences Math., sept.-oct. **1928**). Considérons l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = 0$. Faisons

tourner le demi plan $r > 0$ autour de l'axe des z . Alors une solution régulière dans un domaine du demi plan $r > 0$ de cette équation donnera une fonction harmonique dans l'espace à 3 dimensions. Il résulte de cette remarque que tout segment frontière porté par l'axe des z sera un ensemble impropre pour l'équation considérée.

Janczewski (Leningrad).

Bouligand, Georges: Sur l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = 0$. Bull. Acad. roy. Belg., Cl. Sci., V. s. 17, 379—383 (1931).

Il est démontré que pour toutes les valeurs positives de $\lambda \geq 1$ chaque segment rectiligne de l'axe des z inclus dans la frontière d'un domaine du demi plan $r > 0$ est un ensemble impropre relativement à l'équation proposée. Janczewski (Leningrad).

Bouligand, Georges: Sur l'application d'équations intégral-différentielles à l'étude des singularités de certains champs scalaires et sur divers problèmes linéaires propres à l'étude de la causalité topologique. Ann. sci. École norm. supér., III. s. 48, 95—152 (1931).

Es wird die Natur der isolierten singulären Stellen der Lösungen der Potentialgleichung und nahe verwandter Differentialgleichungen betrachtet. Es sei U eine Lösung der Potentialgleichung im Raume, die im Nullpunkt unstetig, sonst aber in einer gewissen Umgebung stetig ist. Schreibt man in Polarkoordinaten $U = U(P, r)$ als Funktion von r und einem Punkte P der Einheitskugel, so erhält man vermöge der Greenschen Funktion $G(P; Q)$ der Potentialgleichung auf der Einheitskugel für U die Integro-Differentialgleichung

$$2\pi U(P, r) = \iint \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U(Q, r)), G(P; Q) d\sigma_Q,$$

wobei über die Einheitskugel mit Q als laufendem Punkt integriert wird. Der Ansatz $U = r^\alpha \varphi(P)$ führt auf eine Integralgleichung für $\varphi(P)$. Die Eigenfunktionen sind die Kugelfunktionen $Y_\nu(P)$, die zugehörigen Eigenwerte ν und $-(\nu + 1)$. Man erhält für U die Entwicklung

$$U(P, r) = c_0 + \frac{d_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[c_\nu r^\nu + \frac{d_\nu}{r^{\nu+1}} \right] Y_\nu(P),$$

mit konstanten c_ν und d_ν . Verf. leitet diese Darstellung nach Einführung neuer abhängiger und unabhängiger Veränderlichen ab und erhält eine Integralgleichung, der nicht unmittelbar anzusehen ist, daß die Kugelfunktionen Eigenfunktionen sind. Doch ist der Umweg unwesentlich. Sind nur endlich viele $d_\nu \neq 0$, so heißt der Nullpunkt ein Pol, sonst eine wesentlich singuläre Stelle. Durch Integration von $U(P, r) Y_\nu(P)$ folgt vermöge der Orthogonalität der Kugelfunktionen leicht der Picardsche Satz, daß, wenn die Lösung U positiv ist, für $\nu \geq 1$ $d_\nu = 0$ sein muß. Weiter: Besteht eine Ungleichung der Form $U \leq k/r^a$ mit konstanten k und $a > 0$, so ist der Nullpunkt ein Pol, dessen Ordnung $\leq a$ ist. Schließlich leitet Verf. ein Kriterium dafür ab, daß der Nullpunkt ein Pol ist. Entsprechendes gilt natürlich für Entwicklungen um den Punkt $r = \infty$. Die Theorie läßt sich auch auf andere Differentialgleichungen übertragen, die durch den Ansatz $U = \psi(r) \varphi(P)$ in zwei Gleichungen für φ und ψ allein gespalten werden. Zu dem Zwecke behandelt Verf. allgemeiner Entwicklungen der Form

$$U(P, t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} [c_\nu f_\nu(t) + d_\nu g_\nu(t)] Y_\nu(P),$$

wobei die Y_ν ein beliebiges normiertes Orthogonalsystem in zwei Veränderlichen bilden, ferner die f_ν gleichmäßig beschränkt sind, während $g_\nu(t)$ und $g_{\nu+1}(t)/g_\nu(t)$ für $t \rightarrow \infty$ über alle Grenzen wachsen. Wenn nur endlich viele $d_\nu \neq 0$ sind, so heißt $t = \infty$ ein Pol der Funktion U (in unserem Beispiel ist etwa $t = \log 1/r$ zu setzen). Für die Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u = \lambda(r) U$ erhält man so eine Entwicklung der betrachteten Art: die Koeffizienten der Y_ν sind Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung und erfüllen die auferlegten Bedingungen, wenn $\lim_{r \rightarrow 0} r^2 \lambda(r) \geq -\frac{1}{4}$. In diesem Falle gelten die erwähnten Sätze.

Ähnlich behandelt man die Lösungen von $\Delta u = f(z) U$, die in einem Zylinder, dessen Erzeugende parallel zur z -Achse sind, regulär sind und auf dem Zylinder verschwinden (man hat die Greensche Funktion des betr. ebenen Gebietes zu benutzen und $t = z$ zu setzen). Ist der Querschnitt des Zylinders unendlich, so können die Sätze falsch werden. Anstatt der Zylinder kann man auch Kegel betrachten. Für Fragen „im Großen“ ergibt sich, daß Lösungen, die höchstens einen Pol besitzen können, Linearkombinationen von endlich vielen bestimmten Lösungen sind. Das folgt insbesondere für Lösungen, die am Rande gewisser (sehr spezieller) unbeschränkter Gebiete verschwinden. Überträgt man das Resultat in bekannter Weise auf

Differenzengleichungen in einem festen Gitter, so ergibt sich für das betr. System von unendlich vielen linearen Gleichungen, daß die Lösung Linearkombination von Partikularlösungen ist. Die Anzahl der zur Darstellung benötigten Partikularlösungen hängt von der topologischen Beschaffenheit des unbeschränkten Gebietes ab. *Willy Feller* (Kiel).

Pólya, G., und G. Szegő: Über den transfiniten Durchmesser (Kapazitätskonstante) von ebenen und räumlichen Punktmengen. J. f. Math. 165, 4—49 (1931).

Es wird zunächst gezeigt, wie die von Fekete für eine beliebige ebene, beschränkte und abgeschlossene Punktmenge M erklärten Mengenfunktionen $r(M)$ und $d(M)$ (der transfinite Durchmesser von M), sowie die aus der Potentialtheorie bekannte Funktion $k(M)$ (die Kapazitätskonstante von M) auf räumliche Punktmengen übertragen werden können. Die erste der fraglichen Funktionen, $R(M)$, wird aus

$$R_n(M) = \text{Min}_{(p_\nu)} \text{Max}_{(p \text{ auf } M)} \frac{n}{\sum_{\nu=1}^n \frac{1}{|p p_\nu|}},$$

die zweite, $D(M)$, aus

$$D_n(M) = \text{Max}_{(p_\nu \text{ auf } M)} \frac{\binom{n}{2}}{\sum_{\mu < \nu}^n \frac{1}{|p_\mu p_\nu|}}$$

durch den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ gewonnen. Zur Definition der dritten Funktion, $K(M)$, wird von derjenigen Komponente G des komplementären Gebietes von M ausgegangen, welche den unendlich fernen Punkt enthält, und es wird dort eine reguläre, harmonische Funktion U gebildet, die auf dem Rande von G konstant ist und deren Entwicklung im Unendlichen die Form

$$M = \frac{1}{r} + \frac{Y_1(\Theta, \varphi)}{r^2} + \frac{Y_2(\Theta, \varphi)}{r^3} + \dots$$

hat, wo r, Θ, φ Polarkoordinaten und $Y_m(\Theta, \varphi)$ Kugelflächenfunktionen m -ter Ordnung bezeichnen. Schreibt man den konstanten Randwert von U in der Form $1/K$, so heißt K die Kapazitätskonstante von M . Nach dem hier bewiesenen Hauptsatz sind die genannten drei Funktionen stets einander gleich. Die Verff. geben ferner eine bemerkenswerte Verallgemeinerung der beiden erstgenannten Funktionen, indem sie von den Ausdrücken

$$R_n^{(\lambda)} = \text{Min}_{(p_\nu)} \text{Max}_{(p \text{ auf } M)} \left\{ \frac{\sum_{\nu=1}^n |p p_\nu|^\lambda}{n} \right\}^{1/\lambda}, \quad D_n^{(\lambda)} = \text{Max}_{(p_\nu \text{ auf } M)} \left\{ \frac{\sum_{\mu < \nu}^{1,2,\dots,n} |p_\mu p_\nu|^\lambda}{\binom{n}{2}} \right\}^{1/\lambda}$$

ausgehen und hiernach den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ machen, wodurch die vom Parameter λ abhängigen Funktionen $R^{(\lambda)}$ und $D^{(\lambda)}$ erhalten werden, die für $\lambda = 0$ bzw. $\lambda = -1$ in die Funktionen r, d bzw. R, D übergehen. Diese neuen Funktionen, die an zahlreichen Beispielen explizite berechnet werden, führen u. a. zur Definition einer Art Dimension für endliche und unendliche, beschränkte und abgeschlossene Punktmengen. Damit wird die Größe d' oder d'' verstanden, wo $-d'$ bzw. $-d''$ die obere Grenze sämtlicher Werte von λ ist, für welche $D^{(\lambda)}$ bzw. $R^{(\lambda)}$ verschwindet. So wird z. B. für eine Kurve mit stetiger Tangente $d' = d'' = 1$, für eine Fläche mit stetiger Normale $d' = d'' = 2$ erhalten. Es ist stets

$$0 \leq d' \leq 3, \quad 0 \leq d'' \leq 3, \quad d' \geq d''$$

und umgekehrt gibt es Punktmengen, deren Dimension d' einen vorgeschriebenen Wert aus dem genannten Intervalle hat. Die inhaltsreiche Arbeit wird mit der Behandlung einer gewissen, die Zahlen $R_n^{(\lambda)}$ betreffenden Extremalaufgabe beendet.

Myrberg (Helsinki).

Ignatowsky, W. v.: Über doppelpolige Lösungen der Wellengleichung. *Math. Z.* **34**, 1–34 (1931).

Die ebene Wellengleichung $\Delta u + \kappa^2 \cdot w(x, y) = 0$ wird auf die beiden Koordinatenpaare

$$w_1 = \mathfrak{Cof} \frac{\xi + i(\delta + \pi/2)}{2}, \quad t_1 = \mathfrak{Cof} \frac{\xi - i(\delta + \pi/2)}{2}$$

bzw.

$$w_2 = \mathfrak{Sin} \frac{\xi + i(\delta + \pi/2)}{2}, \quad t_2 = \mathfrak{Sin} \frac{\xi - i(\delta + \pi/2)}{2}$$

mit

$$x = a \cdot \mathfrak{Sin} \xi \cdot \cos \delta, \quad y = a \cdot \mathfrak{Cof} \xi \cdot \sin \delta \quad (a \geq 0)$$

transformiert, und verschiedene Typen von zugehörigen Integralen werden zusammengestellt. Funktionentheoretische Betrachtungen führen sodann zur Konstruktion von in bezug auf die x -Achse symmetrischen, mit zwei im Endlichen gelegenen Verzweigungspunkten versehenen Lösungen, deren physikalische Bedeutung darin besteht, daß durch sie das Problem der Beugung elektromagnetischer Wellen an blanken und schwarzen Streifen seine exakte Erledigung finden kann. *Schmidt* (Köthen).

Lindsay, R. B.: Wave motion and the equation of continuity. (*Dep. of Phys., Brown Univ., Providence.*) *Proc. nat. Acad. Sci. U.S.A.* **17**, 420–426 (1931).

Von der bekannten Tatsache ausgehend, daß sich die Differentialgleichung der Expansionswellen in schwach kompressiblen Flüssigkeiten unter Benutzung des Begriffs der Kondensation durch Kombination der hydrodynamischen Kontinuitätsgleichung mit der Bewegungsgleichung ableiten läßt, führt der Verf. den Nachweis, daß man die Wellengleichung auf analogem Wege auch in ihren sonstigen physikalischen Erscheinungsformen (Längsschwingungen elastischer Stäbe, Transversalschwingungen gespannter Saiten, elektromagnetische Wellenvorgänge) gewinnen kann. Unter Beschränkung auf den eindimensionalen Fall axialer Luftschwingungen in einer rotationszylindrischen Röhre wird sodann gezeigt, daß sich Kontinuitäts- und Bewegungsgleichung auf die Form der kanonischen Gleichungen der Mechanik für ein System mit einem Freiheitsgrad bringen lassen, wobei als kanonische Koordinate das Geschwindigkeitspotential $\varphi(x, t)$ und als der dazu kanonisch konjugierte Impuls die Größe $p_\varphi = \frac{f_{\varrho_0}}{c^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ (f = Flächeninhalt des Röhrenquerschnitts, ϱ_0 = ursprüngliche Luftdichte, c = Ausbreitungsgeschwindigkeit der Luftwellen) gewählt wird, während als Hamiltonsche Funktion die Funktionenfunktion

$$W(\varphi, p_\varphi) = \frac{1}{2} \cdot \int_{x_1}^{x_2} \left\{ f_{\varrho_0} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{c^2}{f_{\varrho_0}} \cdot p_\varphi^2 \right\} dx$$

fungiert. *Harry Schmidt* (Köthen).

Oseen, C. W.: Das Fundamentalintegral des wellenmechanischen Keplerproblems. *Jber. dtsh. Math. Ver.igg.* **40**, 264–268 (1931).

Geht man in die Schrödingersche Wellengleichung des nicht-relativistischen Keplerproblems

$$\Delta \psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \cdot \frac{e^2}{r} \cdot \psi = \frac{4\pi m i}{h} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

mit dem Ansatz

$$\psi = r^n \cdot U_{nk}(r, t) \cdot P_{nk}(\cos \vartheta) \cdot \frac{\cos}{\sin}(k\varphi)$$

hinein, so wird man für die Funktion U_{nk} auf die partielle Differentialgleichung

$$r \frac{\partial^2 U_{nk}}{\partial r^2} + 2(n+1) \cdot \frac{\partial U_{nk}}{\partial r} + \frac{8\pi^2 m e^2}{h^2} U_{nk} - \frac{4\pi m i}{h} r \cdot \frac{\partial U_{nk}}{\partial t} = 0$$

geführt. Durch Hinzunahme eines durch ein doppeltes Fourierintegral darstellbaren Störungsgliedes gelingt dem Verf. die Konstruktion des Fundamentalintegrals (im Sinne Zeilons) dieser Gleichung in Form eines mehrfachen komplexen Kurvenintegrals, dessen Richtigkeit für den Spezialfall $n = -1$ und $e = 0$ mit bekanntem Fundamentalintegral verifiziert wird.

Harry Schmidt (Köthen).

Steen, S. W. P.: Divisor functions: Solutions of the differential equation. Proc. Lond. math. Soc., II. s. 32, 356—368 (1931).

Unter der μ ten Teilerfunktion mit den Parametern $\alpha_1, \dots, \alpha_\nu$ wird $Y(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu; \mu; z) = - \int_C z^s e^{\mu \pi i s} \Gamma(\alpha_1 - s) \dots \Gamma(\alpha_\nu - s) ds$ verstanden, wo bei der Integration $-\pi < \arg z < +\pi$ ist und der Weg von $+\infty$ unter Umkreisung der Pole nach $+\infty$ zurückgeht. Schon in einer früheren Arbeit [Proc. Lond. Math. Soc. 31 (1930)] hat Verf. gezeigt, daß die Beziehung $Y(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu; \mu; z) = z^{\alpha_\nu} e^{\mu \pi i \alpha_\nu} Y(\alpha_1 - \alpha_\nu, \dots, \alpha_{\nu-1} - \alpha_\nu, 0; \mu; z)$ gilt; d. h. wir können o. B. d. A. $\alpha_\nu = 0$ festlegen. Ferner sei $Y(\alpha_n, \dots, \alpha_1, 0; 0; z) = 2\pi i Y_{n+1}(z)$. Das Ziel der Arbeit besteht in der Aufstellung der Differentialgleichung für $Y_{n+1}(z)$ und der Entwicklung in der Umgebung der Stelle 0 und ∞ . In § 1 wird die Differentialgleichung hergeleitet:

$$Y_{n+1}^{(n+1)}(z) + \frac{A_1}{z} Y_{n+1}^{(n)}(z) + \dots + \frac{A_n}{z^n} Y_{n+1}'(z) = \frac{(-1)^{n+1}}{z^n} Y_{n+1}(z).$$

(A_i Konstante.) Das ist wegen $Y_1(z) = e^{-z}$ für Y_1 richtig und folgt allgemein durch Induktion. Auf Grund der Konstantenbestimmung ergibt sich für $Y_{n+1}(z)$

$$\frac{d}{dz} z^{1+\alpha_{n-1}-\alpha_n} \frac{d}{dz} z^{1+\alpha_{n-2}-\alpha_{n-1}} \dots \frac{d}{dz} z^{1-\alpha_1} \frac{d}{dz} Y_{n+1}(z) = \frac{(-1)^{n+1}}{z^{\alpha_n}} Y_{n+1}(z). \quad (1)$$

Der § 2 ist der Entwicklung der Lösung in der Umgebung des Anfangspunktes gewidmet der eine außerwesentlich singuläre Stelle ist. Wenn die α_ν und $\alpha_\nu - \alpha_\mu$ keine ganzen Zahlen sind, so bilden die $n+1$ Funktionen

$$y_i(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)m} z^{m+\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + m + 1) \Gamma(\alpha_i + m + 1 - \alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_i + m + 1 - \alpha_n)} \\ (i = 0, 1, \dots, n \text{ und } \alpha_0 = 0)$$

eine Basis, so daß $Y_{n+1}(z) = \sum_{i=0}^n c_i y_i(z)$. Die c_i bestimmen sich aus $z = 0$, und so folgt

$$Y_{n+1}(z) = (-\pi)^n \sum_{i=0}^n \frac{y_i(z)}{\sin \pi(\alpha_i - \alpha_0) \dots \sin \pi(\alpha_i - \alpha_n)},$$

wo im Nenner der Faktor $\sin \pi(\alpha_i - \alpha_i)$ fehlt. Um die Entwicklung bei ∞ zu bekommen (§ 3), wird in (1) $z = \zeta^m$ und $Y_{n+1}(\zeta^m) = e^{a\zeta} g(\zeta)$ gesetzt, sodann $\zeta = 1/\xi$ und $g(\zeta) = \xi^\sigma k(\xi)$. Dieses $k(\xi)$ genügt der Gleichung

$$\left(a - \xi^2 \frac{d}{d\xi}\right) \xi^{-1-m(\alpha_{n-1}-\alpha_n)} \dots \left(a - \xi^2 \frac{d}{d\xi}\right) \xi^{-1+m\alpha_1} \left(a - \xi^2 \frac{d}{d\xi}\right) \xi^\sigma k(\xi) \\ = (-m)^{n+1} \xi^{1+\alpha_n m-m} \xi^\sigma k(\xi).$$

Werden die bisher noch beliebigen Größen a, m, σ so gewählt, daß die beiden ersten Potenzen von ξ im Koeffizienten von $k(\xi)$ verschwinden, so läßt sich $k(\xi)$ asymptotisch darstellen als

$$k(\xi) = \sum_{\nu=0}^N k'_\nu \xi^\nu + \varepsilon_N \xi^{N+1},$$

wo $\varepsilon_N \rightarrow 0$ bei $\xi \rightarrow 0$. Für $Y_{n+1}(z)$ ergibt sich dann als Kombination der $n+1$ Lösungen der Basis für ∞ ebenfalls eine asymptotische Darstellung. G. Wiarda (Dresden).

Schmidt, Hermann: Über die komplementäre Klasse bei den hypozykloiden Funktionssystemen. Math. Z. 33, 714—732 (1931).

Die Klasse K der hypozykloiden Funktionssysteme wird erzeugt durch eine Basis, bestehend aus den n Spalten der Integralmatrix $V = (v_{j, \alpha+k-1}^\beta)$ $j, k = 1, 2, \dots, n$ mit $v_{j, \alpha+k-1}^\beta = \int_{C_j} z^{\alpha+k-1} f^\beta(\tau, z) d\tau$, $f(\tau, z) \equiv \tau^n - n\tau z + n-1$ ($\alpha, \beta, \alpha+n\beta$ keine ganzen

Zahlen), wobei $C_j = (t_j^+ 0^+ t_j^- 0^-)$ eine Doppelschleife ist, die den Verzweigungspunkt t_j ($f(t_j, z) = 0$) und den Nullpunkt abwechselnd in entgegengesetztem Sinn umschlingt. z muß einem beschränkten Teilgebiet der von den Punkten $\varepsilon_h = e^{2\pi i h/n}$ ($h = 1, \dots, n$) radial ins Unendliche aufgeschnittenen Ebene angehören, damit der Integrand in der längs $(0, +\infty)$ und (t_j, ∞) radial aufgeschnittenen τ -Ebene eind. ist und die $|t_j|$ nach unten beschränkt sind. Der Verf. nimmt eine beim Studium hypergeometrischer Differentialsysteme auftauchende [Schlesinger, Math. Z. 28 (1928)] und dort wesentlich einfacher zu übersehende Fragestellung auf und untersucht den Zusammenhang der Klasse K mit der reziproken Klasse K' , die man aus K gewinnt, wenn man α, β durch α', β' ($\alpha + \alpha'$ und $\beta + \beta'$ ganze Zahlen) er-

setzt. Er beweist im ersten Teil, daß die Monodromiegruppe \mathfrak{G}' von K' durch Transformation $\mathfrak{G}' = G^{-1} \mathfrak{G} G$ mit einer konstanten Matrix G ($|G| \neq 0$) aus der Gruppe \mathfrak{G} der zu K komplementären Klasse \check{K} hervorgeht. Die Erzeugenden der Monodromiegruppe \mathfrak{G} von K , d. h. die Umlaufsubstitutionen M_h , die das System $(v_{j,\alpha}^\beta)_{j=1,\dots,n}$ beim Umräumen der n singulären Punkte $z = z_h$ erfährt, wurden in einer früheren Arbeit [R. König und H. Schmidt, J. f. Math. 162 (1930), Satz 7] nach der Methode der veränderlichen Integrationswege berechnet. Die fragliche Matrix G wird jetzt elementenweise konstruiert auf Grund der Forderung, daß durch sie alle zu M_h komplementären Matrizen \check{M}_h ($\check{M}_h = \bar{M}_h^{-1}$; \bar{M}_h transp. M.) in die entsprechenden Umlaufmatrizen M'_h des reziproken Systems $(v_{j,\alpha}^\beta)_{j=1,\dots,n}$, also in die Erz. der Monodromiegruppe \mathfrak{G}' von K' transf. werden. Es zeigt sich dabei, daß diese Transformation auch erhalten wird, wenn die Fundamentalintegrationswege C_j (s. o.) durch $\check{C}_j = (\infty^+ t_j^- \infty_j^- t_j^+)$ ersetzt werden. Damit ist in den Spalten der Matrix $U = (u_{jk}) = G(v_{j,\alpha'+k-1}^\beta)$ eine Basis der Klasse \check{K} gewonnen. Da andererseits auch die Spalten der zu V kompl. Matrix \check{V} , die dem adjungierten Differentialsystem genügen, eine Basis der kompl. Klasse \check{K} bilden, so gibt es eine Matrix Q rationaler Funktionen von z , die beide Integralmatrizen ineinander überführt: $UQ = \check{V}$. Der Verf. zeigt im zweiten Teil, daß dies bei geeigneter Wahl von α', β' sogar eine konstante Matrix leistet, indem er β' so bestimmt, daß die Elemente der Matrix $\bar{U}V (= \check{Q})$ Polynome sind, und schließlich durch geeignete Wahl von α' erreicht, daß auch der Pol im Unendlichen fortfällt. \check{Q} ist jetzt bis auf einen konstanten Faktor leicht zu berechnen. Die Konstante wird mittels der Jacobischen Formel für die Determinante einer Integralmatrix und des Heymannschen Analogons für Differenzengleichungen bestimmt unter Heranziehung des früher (l. c. 4, 99) ermittelten asymptotischen Verhaltens der $v_{j,\alpha}^\beta$ für $R(\alpha) \rightarrow \infty$. v. Koppenfels (Hannover).

Variationsrechnung:

Koschmieder, Lothar: Die neuere formale Variationsrechnung. Jber. dtsch. Math.-Verigg 40, 109–132 (1931).

Es handelt sich um einen mit großer Sorgfalt zusammengestellten enzyklopädischen Überblick (erstattet bei der 5. Tagung deutscher Mathematiker und Physiker 1929 in Prag) über die ungemein zahlreichen Untersuchungen der letzten Jahre, die die einem R_n durch das Grundintegral eines mehr oder weniger allgemeinen Variationsproblems aufgeprägte Maßbestimmung zum Gegenstand haben. Ein Eingehen auf Einzelheiten ist naturgemäß und besonders in Anbetracht der Fülle des behandelten Stoffes hier unmöglich. A. Duschek (Wien).

Courant, R.: Neue Bemerkungen zum Dirichletschen Prinzip. J. f. Math. 165, 247–256 (1931).

Der Existenzbeweis für analytische Funktionen auf einer beliebigen Riemannschen Fläche G , die der Strömung mit einer auf G vorgegebenen Doppelquelle entsprechen, ist bekanntlich mit dem Nachweis der Lösbarkeit des folgenden Minimumproblems gleichbedeutend: Unter allen Funktionen $\Phi(x, y)$, die außerhalb und innerhalb eines Kreises C um den Nullpunkt vom Radius a stetig und stückweise stetig differenzierbar sind und die auf der Peripherie von C den Sprung $-\frac{2x}{a^2}$ erleiden, ist diejenige Funktion U gesucht, für die $\iint_G (\Phi_x^2 + \Phi_y^2) dx dy$ minimal wird; der Realteil der gesuchten analytischen Funktion ist dann $u = U + S$ mit $S = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{x}{a^2}$ innerhalb C , $S = 0$ außerhalb C . Für U gibt der Verf. einen neuen Existenzbeweis, der gegenüber den bekannten eine Reihe von Vereinfachungen aufweist. Von einer beliebigen Minimalfolge $\Phi^{(n)}$ des Problems wird gezeigt, daß die über einen Kreis vom Radius α erstreckten Integrale $\frac{1}{\pi \alpha^2} \iint \frac{\partial \Phi^{(n)}}{\partial x} dx dy$ bzw. $\frac{1}{\pi \alpha^2} \iint \frac{\partial \Phi^{(n)}}{\partial y} dx dy$ gegen Funktionen P bzw. Q streben, die nur vom Mittelpunkt x, y des Kreises abhängen und die außerdem Ableitungen einer Funktion U nach x bzw. y darstellen. Durch Approximation des Integrationsgebietes mit Hilfe von Kreisen, die sich nicht überdecken, ergibt sich aus der Halbstetigkeit des Integrals nach unten unmittelbar, daß U das gestellte Minimum-

problem löst, während aus der Mitteleigenschaft folgt, daß $U + S$, abgesehen vom Nullpunkt, eine reguläre Potentialfunktion ist. — In einem zweiten Teil wird kurz gezeigt, wie man auf Grund des gewonnenen Existenzsatzes die bekannte Abbildung einer schlichtartigen Riemannschen Fläche G auf die schlichte, geschlitzte Ebene leisten kann; auch hier ergeben sich gegenüber dem üblichen Vorgange Vereinfachungen.

Rellich (Göttingen).

Graves, Lawrence M.: On the problem of Lagrange. *Amer. J. Math.* **53**, 547 bis 554 (1931).

On écrit les équations différentielles du problème de Lagrange en faisant usage de la règle bien connue dite «des multiplicateurs». Cette règle est établie dans les ouvrages classiques sous certaines conditions de continuité et de dérivabilité concernant les fonctions qui interviennent dans le problème. L'auteur s'est proposé essentiellement de démontrer la règle des multiplicateurs en faisant sur ces fonctions le minimum d'hypothèses. Au lieu de considérer n fonctions $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ et leurs dérivées premières $y'_1(x)$, $y'_2(x)$, ..., $y'_n(x)$, dans un intervalle donné (x^1, x^2) , il introduit n fonctions mesurables $z_1(x)$, $z_2(x)$, ..., $z_n(x)$ et leurs intégrales indéfinies (au sens de M. Lebesgue)

$$y_1(x) = y_1^1 + \int_{x^1}^x z_1(x) dx, \dots, y_n(x) = y_n^1 + \int_{x^1}^x z_n(x) dx,$$

avec les conditions aux limites

$$y_i^1 + \int_{x^1}^{x^2} z_i(x) dx = y_i^2 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

où $y_1^1, \dots, y_n^1, y_1^2, \dots, y_n^2$ sont des constantes données. Le problème consiste à rendre minimum l'intégrale

$$\int_{x^1}^{x^2} f(x, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n) dx$$

dans l'ensemble des fonctions z_1, z_2, \dots, z_n qui vérifient les m ($< n$) équations (sauf peut-être sur un ensemble de points de mesure nulle)

$$\varphi_\alpha(x, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, m).$$

L'auteur arrive à démontrer la règle des multiplicateurs (sous une forme qui présente par rapport à la forme classique des modifications commandées par la généralité des conditions) au moins dans le cas qui correspond au cas appelé normal dans les ouvrages classiques, et il formule aussi une condition nécessaire analogue à la condition de Weierstrass.

A. Szücs (Budapest).

Morse, Marston: Sufficient conditions in the problem of Lagrange with fixed end points. *Ann. of Math.*, II. s. **32**, 567—577 (1931).

Le titre indique suffisamment l'objet du travail. On sait que la définition des extrémales dans le problème de Lagrange fait intervenir des multiplicateurs $\lambda_0, \lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots$ dont le premier est une constante. Si, dans tous les systèmes de multiplicateurs relatifs à un problème et à un intervalle donnés, on a $\lambda_0 \neq 0$, l'extrémale est dite «normale». Elle est appelée «identiquement normale» si elle est normale pour toute portion de l'intervalle donné. Si une extrémale est identiquement normale dans l'intervalle considéré, si elle y satisfait aux conditions de Clebsch et de Weierstrass, et si elle peut être entourée d'un champ de Mayer, elle fournit effectivement un minimum strict, fort et relatif. La constatation de l'existence d'un champ de Mayer est un problème délicat. L'auteur donne à cet égard deux théorèmes d'oscillation qui se rapportent directement aux extrémales secondaires, c'est-à-dire aux extrémales de l'intégrale exprimant la variation seconde de l'intégrale donnée. Le second de ces théorèmes affirme l'existence d'un champ de Mayer pour les extrémales secondaires à condition que le point conjugué de l'une des extrémités de l'intervalle ne tombe pas dans

l'intervalle. L'auteur en conclut par un nouveau théorème que la même condition assure l'existence d'un champ de Mayer pour les extrémales du problème.

A. Szücs (Budapest).

Morse, Marston: Sufficient conditions in the problem of Lagrange with variable end conditions. Amer. J. Math. 53, 517—546 (1931).

Le problème fondamental est ainsi énoncé: Trouver dans l'espace (x, y_1, \dots, y_n) le minimum de l'expression

$$J = \int_{x^1}^{x^2} f(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx + G(x^1, y_1^1, \dots, y_n^1; x^2, y_1^2, \dots, y_n^2)$$

sous les conditions suivantes: 1. Les courbes qui entrent en considération doivent vérifier m ($< n$) équations différentielles

$$\Phi_\beta(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, m)$$

et 2. Les extrémités $(x^1, y_1^1, \dots, y_n^1)$ et $(x^2, y_1^2, \dots, y_n^2)$ doivent appartenir à deux „multiplicités aux limites“ données:

$$x^s = x^s(\alpha_1, \dots, \alpha_r), \quad y_i^s = y_i^s(\alpha_1, \dots, \alpha_r). \quad \left(\begin{array}{l} s = 1, 2 \\ i = 1, 2, \dots, n \\ 0 < r \leq 2n + 2 \end{array} \right)$$

Les équations différentielles ainsi que la condition de transversalité sont bien connues. En considérant une courbe satisfaisant à ces conditions („extrémale“) et en supposant qu'elle est normale dans l'intervalle considéré, on calcule la variation seconde de l'expression donnée. Celle-ci se présente comme la somme de deux termes

$$2 \int_{x^1}^{x^2} \omega(\eta, \eta') dx + \sum b_{hk} u_h u_k \quad (h, k = 1, 2, \dots, r)$$

dont le premier est l'intégrale d'une forme quadratique $2\omega(\eta, \eta')$ des variations $\eta_1, \dots, \eta_n, \eta'_1, \dots, \eta'_n$ vérifiant un système „auxiliaire“ d'équations différentielles (lesquelles s'obtiennent par la méthode des variations en partant des équations différentielles données $\Phi_\beta = 0$) et le second une forme quadratique en u_1, u_2, \dots, u_r , variables liées par des relations linéaires aux valeurs que prennent les variations η aux extrémités. L'auteur introduit maintenant un paramètre σ et formule le „problème accessoire“ qui consiste à rendre minimum l'expression

$$I(\eta, u, \sigma) \equiv \sum b_{hk} u_h u_k + 2 \int_{x^1}^{x^2} [\omega(\eta, \eta') - \sigma \sum \eta_i^2] dx,$$

les conditions imposées aux grandeurs η, η', u étant les mêmes que tout à l'heure. Par solution caractéristique, il entend une solution de ce problème telle que $\eta_1, \dots, \eta_n \neq 0, \dots, 0$, et par racine caractéristique une valeur σ qui conduit à une telle solution. Il montre que si l'extrémale servant de point de départ donne le minimum dans le problème primitif, il est nécessaire que le problème accessoire ne possède pas de solution caractéristique pour $\sigma < 0$. Il fait ensuite l'hypothèse restrictive que l'extrémale considérée n'est tangente à aucune des multiplicités aux limites. Cela posé, il énonce et établit le résultat principal de son travail: Pour qu'une extrémale identiquement normale donne un minimum strict, fort et relatif, il est suffisant que les conditions de Weierstrass et de Clebsch soient vérifiées, que l'extrémale ne soit pas tangente aux multiplicités aux limites, et que les racines caractéristiques soient positives. Au cours de la démonstration, l'auteur est amené à considérer une certaine fonction $Q(z, \sigma)$, forme quadratique par rapport aux variables z_1, z_2, \dots . La troisième partie du mémoire est consacrée à l'étude approfondie de cette fonction, qui lui permet de généraliser le problème primitif. Finalement il donne quelques théorèmes d'oscillation relatifs aux racines caractéristiques.

A. Szücs (Budapest).

Morse, Marston: Closed extremals. I. Ann. of Math., II. s. **32**, 549—566 (1931).

Ce travail est consacré 1° à la définition de l'indice des extrémale fermées, 2° à la démonstration de l'invariance de l'indice, 3° à la recherche de l'indice des géodésiques fermées sur l'ellipsoïde de l'espace à m dimensions. Voici ce qu'il faut entendre par indice: On considère dans l'espace w_1, w_2, \dots, w_m à m dimensions l'intégrale de forme paramétrique

$$J = \int_{c_1}^{c_2} F(w_1, \dots, w_m; \dot{w}_1, \dots, \dot{w}_m) dt,$$

la fonction F ayant l'homogénéité positive de degré 1 par rapport aux variables $\dot{w}_1, \dot{w}_2, \dots, \dot{w}_m$, et une extrémale fermée g de cette intégrale. On divise cette extrémale en p arcs assez petits pour qu'aucun d'eux ne contienne deux points conjugués. On fait passer par les points de division des surfaces à $r-1$ ($< m-1$) dimensions, on prend arbitrairement sur chacune d'elles un point (l'ensemble de ces points dépendra de $\mu = (r-1)p$ paramètres u_1, u_2, \dots, u_μ choisis de telle façon qu'en leur attribuant la valeur zéro, on retombe sur les points de division de g) et on joint deux à deux les points pris sur deux surfaces consécutives par des arcs d'extrémale. On obtient ainsi une ligne fermée, composée de p arcs d'extrémale et possédant en général p points anguleux. Calculons maintenant l'intégrale J pour cette ligne fermée. Elle dépendra des paramètres u_1, u_2, \dots, u_μ et permettra de former l'expression

$$Q = \sum_{h, k=1}^{\mu} \left(\frac{\partial^2 J}{\partial u_h \partial u_k} \right)_0 z_h z_k$$

qui est une forme quadratique par rapport aux grandeurs z_1, z_2, \dots, z_μ . Réduisons l'expression Q , par une transformation linéaire et réelle des variables z_1, \dots, z_μ , à une somme de carrés. Le nombre des termes négatifs sera dit l'indice de la forme et, par extension, de l'extrémale g . L'auteur démontre que cet indice est un invariant géométrique, à savoir qu'il ne dépend pas du choix des coordonnées, ni de la division de l'extrémale en arcs. Comme application, il calcule l'indice de l'ellipse

$$a_i^2 w_i^2 + a_j^2 w_j^2 = 1 \quad w_r = 0 \quad (r \neq i \text{ et } \neq j)$$

qui forme une géodésique fermée sur l'ellipsoïde

$$a_1^2 w_1^2 + a_2^2 w_2^2 + \dots + a_m^2 w_m^2 = 1,$$

en supposant que les quantités a_1, a_2, \dots, a_m sont positives, rangées dans un ordre décroissant et suffisamment voisines de l'unité. Il trouve que cet indice a pour valeur: $m + i + j - 5$. Pour terminer, il annonce quelques résultats d'un travail ultérieur qui sera consacré aux extrémale fermées dans le cas analytique. *A. Szücs* (Budapest).

Lichtenstein, Leon: Zur Variationsrechnung. II. Mitt. Das isoperimetrische Problem. J. f. Math. **165**, 194—216 (1931).

Die Arbeit beschäftigt sich mit dem isoperimetrischen Problem bei einfachen Integralen in der vor-Weierstraßschen Fassung. Es wird eine im Intervalle $a \leq x \leq b$ mit stetiger erster und zweiter Ableitung versehene Funktion $\tilde{y}(x)$ betrachtet, die für $x = a$ und $x = b$ vorgeschriebene Werte annimmt und dem Integrale $I\{y\} = \int_a^b f(x, y, y') dx$ ein relatives Minimum erteilt im Vergleich mit allen Funktionen $y(x)$ in einer Umgebung erster Ordnung, die in $a \leq x \leq b$ stetige erste Ableitung haben, für $x = a$ und $x = b$ die vorgeschriebenen Werte annehmen und dem Integrale $K\{y\} = \int_a^b g(x, y, y') dx$ einen festen Wert erteilen. Hierbei sind f und g analytische Funktionen ihrer Argumente. Zweck der Arbeit ist es, unter Heranziehung der in der Theorie der Randwertaufgaben herausgebildeten Methoden teils notwendige, teils hinreichende Bedingungen für die Extremale $\tilde{y}(x)$ abzuleiten, und insbesondere die Jaco-

bische Bedingung, in der von Schwarz für Minimalflächen entwickelten Fassung, auf das vorliegende Problem zu übertragen. Es wird vorausgesetzt, daß \dot{y} keine Extremale des Problems $\int_a^b g(x, y, y') dx$ ist. Dann gibt es eine Funktion η_1 , die in der Untersuchung dann festgehalten wird, welche in $a \leq x \leq b$ eine stetige Ableitung erster Ordnung hat, für $x = a$ und $x = b$ verschwindet, und für die $\int_a^b (\dot{g}_y \eta_1 + \dot{g}_y, \eta_1') dx \neq 0$ ausfällt, wo z. B. $\dot{g}_y = g_y(x, \dot{y}, \dot{y}')$ ist. Es sei η eine beliebige, in $a \leq x \leq b$ mit einer stetigen Ableitung erster Ordnung versehene und für $x = a$ und $x = b$ verschwindende Funktion, und ε ein Parameter mit kleinem absoluten Betrage. Es wird $\zeta = \eta + \psi \eta_1$, $\psi = \psi_0 + \varepsilon \psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2 + \dots$ gesetzt, wobei die Koeffizienten $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots$ so bestimmt werden, daß $K\{\dot{y} + \varepsilon \zeta\} = K\{\dot{y}\}$ identisch in ε für hinreichend kleines $|\varepsilon|$. Nachdem ψ auf diese Weise bestimmt wurde, werden Variationen der Form $y = \dot{y} + \varepsilon \zeta$ betrachtet. Aus der Entwicklung von $I\{y\} - I\{\dot{y}\}$ nach Potenzen von ε ergeben sich zunächst die klassischen Resultate (Eulersche Regel, isoperimetrische Konstante, Weierstraßsche Bedingung) in eleganter Weise und teilweise neuer Fassung. Dann folgt der Hauptteil der Arbeit (§ 2 bis 6), in welchem die Untersuchung der zweiten Variation auf eine Integro-Differentialgleichung von der Form

$$\frac{d}{dx} \left(p \frac{dv}{dx} \right) + \lambda (kv - \int N(x, t) v(t) dt) = 0$$

gegründet wird. Hierbei ist λ ein Parameter; $N(x, t)$, $p(x)$, $k(x)$ sind Funktionen, die durch das Problem und die Extremale \dot{y} bestimmt sind, wobei p positiv und $N(x, t)$ symmetrisch und $\neq 0$ ist. Nachdem aus naheliegenden Gründen eine der Eigenfunktionen und der zugehörige Eigenwert als trivial erklärt und der kleinste positive nicht-triviale Eigenwert mit μ_1 bezeichnet wird, ergibt sich $\mu_1 \geq 1$ als notwendig und $\mu_1 > 1$ als hinreichend für ein schwaches relatives Minimum. Dann wird zum Schluß der Fall $\mu_1 = 1$ durch Zerlegung in Unterfälle untersucht. — Der Verf. stellt in Aussicht, seine wichtigen Ergebnisse, die er für andere Klassen von Problemen bereits früher in einer Reihe von Arbeiten (die in der hier referierten Mitteilung angeführt sind) entwickelt hatte, auf das isoperimetrische Problem in Parameterdarstellung und auf mehrdimensionale Probleme auszudehnen.

Tibor Radó (Columbus).

Bornesen, T.: Extréma liés. Mat. fys. Medd. danske Vidensk. Selsk. **11**, Nr 3, 1—31 (1931).

In Verallgemeinerung einer Untersuchung, die der Autor in seinem Buche „Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes“ (Paris 1929) dargestellt hat, werden in dieser Arbeit die beiden folgenden Probleme behandelt: 1. Es seien $f(x)$, $f^1(x)$, \dots , $f^p(x)$ Funktionen der n Veränderlichen $x = x_1, x_2, \dots, x_n$. Dann soll zu dem Minimumproblem $f(x) = \text{Min.}$ unter den Nebenbedingungen $f^1(x) = a_1, \dots, f^p(x) = a_p$ eine Funktion $\Phi(f^1, \dots, f^p)$ bestimmt werden, so daß die „isoperimetrische Ungleichung“

$$f(x) - \Phi(f^1(x), \dots, f^p(x)) \geq 0$$

gilt für alle möglichen Wertsysteme, die die Funktionen $f^1(x), \dots, f^p(x)$ annehmen können; für das Minimum soll dabei das Gleichheitszeichen eintreten. — 2. Zu dem Variationsproblem $f = \int_0^1 F(x, y, y') dx = \text{Min.}$, wobei zur Konkurrenz alle Funktionen $y(x)$ zugelassen sind, die die Punkte $0, y_0$ und $1, y_1$ verbinden und den Integralen

$$f^i = \int_0^1 F^i(x, y, y') dx \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

fest vorgeschriebene Werte erteilen, ist eine Funktion $\Phi(f^1, \dots, f^p)$ zu bestimmen, so daß $f - \Phi(f^1, \dots, f^p) \geq 0$ für alle möglichen f^1, \dots, f^p wird; für die Lösung des Mini-

mumproblems soll dabei das Gleichheitszeichen stehen. Zur Bestimmung von Φ geht man so vor: Man berechnet aus den Gleichungen

$$\frac{df(x)}{dx_i} - \left(\lambda_1 \frac{df^1(x)}{dx_i} + \dots + \lambda_p \frac{df^p(x)}{dx_i} \right) = 0$$

bzw.

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} - \lambda_i \left(F_y^i - \frac{d}{dx} F_{y'}^i \right) = 0 \quad i = 1, \dots, p$$

x_1, \dots, x_n bzw. $y(x)$ als Funktion von $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ und erhält so f, f^1, \dots, f^p als Funktionen von $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Drückt man mit Hilfe der Gleichungen $f^i = f^i(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ ($i = 1, \dots, p$) die Größen $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ durch f^1, \dots, f^p aus und setzt diese Ausdrücke in $f = f(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ ein, so gewinnt man in $f = \Phi(f^1, \dots, f^p)$ die gesuchte Funktion Φ . — Die Möglichkeit der beschriebenen Operationen wird vorausgesetzt. Dafür, daß nun wirklich $f - \Phi \geq 0$ gilt, wird ein hinreichendes Kriterium gegeben.

Rellich (Göttingen).

Süss, Wilhelm: Die Isoperimetrie der mehrdimensionalen Kugel. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl. H. 19, 342—344 (1931).

Aus der Brunn-Minkowskischen Theorie wird die Ungleichung vorausgesetzt

$$\{V[(1-t)p + t \cdot q]\}^{1/n} \geq (1-t)\{V(p)\}^{1/n} + t\{V(q)\}^{1/n}, \quad (1)$$

wo $V(p)$ das Volumen eines konvexen Körpers p im euklidischen R_n bedeutet und die lineare Zusammensetzung konvexer Körper in der üblichen Weise erklärt ist. Ferner wird vorausgesetzt, daß in (1) das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn die Körper p und q homothetisch sind. Erklärt man dann die gemischten Volumina $V_i(p, q)$ wie üblich als Koeffizienten des Polynoms

$$(1-t)^n V(p) + \sum_{i=1}^{n-1} (1-t)^{n-i} t^i V_i(p, q) + t^n V(q) = V[(1-t)p + tq],$$

so beweist Verf. mittels (1) die Ungleichung

$$[V_{n-1}(p, q)]^n \geq V(p)[V(q)]^{n-1}, \quad (2)$$

wobei das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn p und q homothetisch sind. Nimmt man für p die Einheitskugel des R_n , so stellt $V_{n-1}(p, q)$ die Oberfläche von q dar, und dann folgt aus (2), daß die Kugel unter allen konvexen Körpern gleicher Oberfläche des R_n das größte Volumen hat.

Cohn-Vossen (Köln).

Süss, Wilhelm: Eine einfache Kennzeichnung des Kreises. Jber. dtsch. Math. Ver.igg. 40, 251—253 (1931).

Die Längen der Sehnen durch einen festen Punkt P eines ebenen Eibereichs haben ein Minimum $s(P)$. Dieses Minimum wird entweder von einer oder von mehreren Sehnen erreicht. Es wird bewiesen, daß in jedem Eibereich, der kein Kreis ist, mindestens 2 Punkte vorhanden sind, bei denen der zweite Fall eintritt. Mit anderen Worten: Der Kreis ist der einzige Eibereich mit höchstens einem Punkt, durch den mehr als eine Sehne kleinster Länge geht. Der Beweis beruht auf dem Studium der Mengen, auf denen $s(P)$ konstant ist und einigen bekannten Eigenschaften der Eibereiche konstanter Breite.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Levi-Civita, T.: Über Zermelos Luftfahrtproblem. Z. angew. Math. u. Mech. 11, 314—322 (1931).

E. Zermelo hat in seiner Arbeit „Über das Navigationsproblem bei ruhender oder veränderlicher Windverteilung“, Z. angew. Math. u. Mech. 11, 114—124 (s. Zbl. 1, 341), ein Variationsproblem behandelt, das bereits hinsichtlich der Ableitung der notwendigen Bedingungen nicht unter die üblichen Typen von Variationsproblemen fällt. Der Autor gelangt nun durch einfache Umformung zu einem Variationsproblem, das zu den einfachsten Fällen der „Mayerschen Aufgabe“ gehört. Es werden die notwendigen Bedingungen abgeleitet, wobei von vornherein der n -dimensionale Raum zugrunde gelegt wird. Den Bedingungen wird eine einfache Normalform gegeben.

Rellich (Göttingen).

Glæssberg, Wolfgang: Die Bewegung einer rollenden Kreisscheibe als Problem der Variationsrechnung. Jber. dtsh. Math. Ver.igg. 40, 269—292 (1931).

Es werden die Bewegungsgleichungen einer homogenen Kreisscheibe angegeben, die senkrecht auf der x, y -Ebene rollt und auf deren Mittelpunkt M eine konservative Kraft mit gegebenem Potential wirkt. Bezeichnet $P(x, y)$ den Berührungspunkt der Kreisscheibe mit der x, y -Ebene, ϑ den Winkel, den ein fester Radius MA der Kreisscheibe mit MP bildet, φ den Winkel, den die Ebene der Kreisscheibe mit der x -Achse einschließt, so erhält man als Rollbedingungen: $\dot{y} = \tan \varphi \dot{x}$, $\dot{\vartheta} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{\dot{x}}{\cos \varphi}$.

Verf. erhält nun die gesuchten Bewegungsgleichungen unter Berücksichtigung dieser nichtholonomen Nebenbedingungen aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung in der Jacobischen Form. Sie lauten: 1. Die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ um den jeweils senkrechten Durchmesser ist konstant, und 2. Die Tangentialkomponente der Beschleunigung des Radmittelpunktes M ist gleich der mit $\frac{2}{3}$ multiplizierten Tangentialkomponente der wirkenden Kraft. Für die speziellen Potentiale $U = c, cx^2, cx^4, cx$ werden die Bahnkurven des Berührungspunktes P explicite bestimmt. Vgl. auch dies. Zbl. 2, 59. Rellich.

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Versicherungsmathematik:

Galvani, L.: Contributi alla determinazione degli indici di variabilità per alcuni tipi di distribuzione. Metron 9, 3—45 (1931).

Es werden alle bekannten Disparitäts- und Konzentrationsmethoden im Falle der stetigen Verteilungen betrachtet und systematisch dargestellt. Insbesondere ist der Fall behandelt, wo die Dichtigkeitsfunktion linear ist. Will man eine bessere Annäherung erlangen als die durch diskrete oder hystogrammische Darstellung erreichbare, so können die obenerwähnten Ausdrücke für lineare Dichtigkeitsfunktionen in allen praktischen Fällen derart angewendet werden, daß die wirkliche Verteilung, etwa durch graphische Versuche oder andere empirische Hilfsmittel, in Teile zerlegt wird, deren Dichtigkeit als linear betrachtet werden kann. Mit anderen Worten, die wirkliche Dichtigkeitskurve wird durch eine Polygonallinie näherungsweise ersetzt.

Bruno de Finetti (Trieste).

Ono, Suminosuke: On vector quantity. II. Vector quantity reducible from a kind of probability. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. 13, 157—165 (1931).

Der Verf. zeigt die Möglichkeit, die Mannigfaltigkeit der n -dimensionalen Vektoren mit Hilfe von Zustandswahrscheinlichkeiten im n -dimensionalen Raum zu kennzeichnen und die vektoriellen Rechenregeln in Verbindung zu bringen mit den Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Lüneburg (Göttingen).

Geometrie.

Abramescu, N.: Relationen zwischen den sphärischen Dreiecken und den Winkeln der Trieder. Gaz. mat. 36, 402—405 (1931) [Rumänisch].

Thébault, V.: Cercles remarquables du triangle. Gaz. mat. 36, 441—443 (1931).

Conte, Luigi: Relazioni fra elementi notevoli d'un triangolo armonico. Giorn. Mat. Battaglini, III. s. 69, 60—68 (1931).

Yanagihara, Kitizi: On limited Mascheroni's geometrical constructions. Tôhoku math. J. 34, 89—102 (1931).

The following theorem is proved: all the problems of construction in elementary geometry can be solved in Mascheroni's sense, with given compasses, which are only capable of describing such circles as their radii are not greater than a given line-segment α and not smaller than another given line-segment β , however small the difference $\alpha - \beta$ may be.

O. Bottema (Groningen.)

● **Haussner, R., und W. Haack:** Darstellende Geometrie. Tl. 3. Zylinder, Kegel, Kugel, Rotations- und Schraubenflächen, Schattenkonstruktionen, Axonometrie. (Samml. Götschen. Bd. 144.) Berlin u. Leipzig: Walter de Gruyter & Co. 1931. 141 S. RM. 1.80.

Mohrmann: Stetigkeit in der Geometrie. Tätigkeitsber. math. Fachschaft Univ. Heidelberg 1931, 5—17.

Die Arbeit ist der Inhalt eines Vortrages, in dem Verf. darzulegen sucht, daß die Vollständigkeit einer linear geordneten Menge diskreter Elemente im Dedekindschen Sinne noch nicht ausreicht, um diese Menge als stetig im Sinne der Geometrie zu charakterisieren. Die projektive Geometrie begründet man gewöhnlich durch die Axiome der Verknüpfung und Anordnung unter Hinzunahme des Pascal-Pappusschen Satzes, der die Kommutativität der Streckenrechnung verbürgt. Da dieser aber ein rein algebraischer Satz ist, ergeben sich so bekanntlich mannigfache Geometrien (u. a. endliche). Diese werden nun in einer bemerkenswert einfachen Weise durch Koordinatengeometrien dargestellt: man betrachte am einfachsten ein rechtwinkliges Koordinatenkreuz, dessen Achsen mit kongruenten Skalen versehen sind, wobei vorausgesetzt wird, daß die Koordinaten 1. den linearen Axiomen der Anordnung und 2. den Axiomen der kommutativen Körper genügen. Koordinatenlinien seien die Geraden $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$, „Punkte“ seien die Schnittpunkte der Koordinatenlinien, „Gerade“ die Punktörter, die durch lineare Gleichungen gegeben sind, deren Koeffizienten ebenfalls dem Körper der Koordinaten angehören. Als Skalen werden nun insbesondere die Punkte einer linearen nichtarchimedischen Geometrie benutzt, so daß sich eine nichtarchimedische projektive Geometrie ergibt. Die Skalen sind nicht vollständig im Dedekindschen Sinne. Wollte man sie aber in der üblichen Weise durch Hinzunahme von „Schnitten“ vervollständigen, so würde man gegen die projektiven Axiome verstoßen: zwei Geraden hätten unendlich viele isolierte Schnittpunkte. Das erklärt sich dadurch, daß der so definierte „Zahlbereich“ keinen Körper mehr bildet, und Verf. schließt daraus, daß eine linear geordnete Menge nur dann stetig im Sinne der Geometrie zu sein braucht, wenn sie einen Körper bildet und vollständig ist im Dedekindschen Sinne. Zur Begründung „der“ projektiven Geometrie sei das Stetigkeitsaxiom oder ein gleichwertiger Ersatz unentbehrlich.

Feller (Kiel).

Brahmachari, I.: Some advances towards a purely geometrical justification of the use of unreal elements in projective geometry. Proc. Cambridge philos. Soc. 27, 306 bis 325 (1931).

Im Gegensatz zu v. Staudt gründet Verf. die synthetische Einführung der imaginären Gebilde in der reellen projektiven n -dimensionalen Geometrie auf Kollineationen der Graden, die die Periode 3 haben. Eine solche Kollineation ist stets ohne reelle Fixpunkte, während man bei der Definition des imaginären Punkts durch Involutionen die Fixpunktfreiheit erst voraussetzen muß. Es werden dann auch die imaginären Graden, Ebenen usw. in ziemlich einfacher Weise synthetisch eingeführt. Von den grundlegenden Inzidenzrelationen der linearen Räume werden aber nicht alle für die so eingeführten imaginären Räume bewiesen, auch gelang es Verf. bisher nicht, den Hauptsatz der projektiven Geometrie, daß eine Kollineation der Graden durch 3 Punkte bestimmt ist, auf die synthetisch definierten komplexen Graden restlos zu verallgemeinern. Einige wesentlichen Schwierigkeiten auf diesem Weg werden in der Arbeit formuliert und überwunden.

Cohn-Vossen (Köln).

Jolles, Stanislaus: Die Polarität als Grundlage in der Geometrie der linearen Strahlenkongruenz. Math. Z. 33, 733—790 (1931).

Die Abhandlung, die sich zum Teil auf frühere Arbeiten des Verf. stützt, ist rein synthetisch gehalten. Der Grundgedanke läßt sich vielleicht kürzer mit Hilfe des Kleinschen Übertragungsprinzips beschreiben, der die Graden als Punkte einer Hyperfläche H (2. Ordnung) eines R_5 deutet. Eine lineare Kongruenz K erhält man dann durch den Schnitt h eines R_3 dieses R_5 mit H . In jenem R_3 bestimmt die Fläche 2. Ordnung h eine Polarenverwandtschaft P . Die Eigenschaften von P , im ursprünglichen Raum gedeutet, sind der Gegenstand der vorl. Arbeit. Man erhält zwei verschiedene Deutungen, je nachdem man von den Ebenen (e) oder den Punkten (E) jenes R_3 ausgeht. Eine Ebene e des R_5 bestimmt durch ihren Schnitt mit H eine Regelschar 2. Ord-

nung F , die in K liegt, wenn e in R_3 liegt. Den Pol E von e in R_3 bezüglich h hat man nun als Träger eines Ebenenbündels (e') aufzufassen, das wieder auf ein Bündel von Regelscharen (F') aus K führt. Das Bündel (F') nennt Verf. autopolar zu F . Betrachtet man nämlich im ursprünglichen Raum die Polarenverwandtschaft von F , so gehen alle Flächen (F') in sich über. Somit führt P zu einer Polarenverwandtschaft in dem „Gebüsch“ der in K enthaltenen Regelscharen 2. Ordnung. Die Eigenschaften dieser Abbildung behandelt der erste Teil der Arbeit. Im 2. Teil wird die andere Deutung von P zugrunde gelegt. Jedem Punkt E des R_3 entspricht bekanntlich ein linearer Komplex. E liegt dann und nur dann in R_3 , wenn der Komplex die Leitgraden von K enthält. Die Gesamtheit dieser Komplexe ist ein Komplexgebüsch; in ihm bestimmt P eine Polarität, wobei zugeordnete Komplexe füreinander nullinvariant sind. Der Komplex E ist derjenige Komplex des Gebüsches, der die Regelschar e enthält, wenn E der Pol von e in R_3 bezüglich h ist. Also bestehen zwischen beiden Deutungen einfache Übergänge. In jedem Fall weist P Beziehungen zu der Involution des ursprünglichen Raumes auf, bei der die Leitgraden von K punktweise festbleiben. Im 3. Teil wird der vorher ausgeschlossene Fall behandelt, daß die Kongruenz K parabolisch ist. Dann ist R_3 tangential an H , daher wird h ein Kegel und P artet aus. Stets wird auf die Realitätsverhältnisse eingegangen, auch werden einige affine Spezialisierungen gegeben. Verf. plant auch eine metrische Spezialisierung; damit wird die Fokaltheorie der linearen Kongruenzen auf eine neue Grundlage gestellt werden. *Cohn-Vossen* (Köln).

Pomey, Léon: Applications géométriques des involutions d'ordre supérieur portées par une transversale unicursale à l'étude des courbes et surfaces déterminées par des points. J. École polytechn. Paris, II.s. H. 28, 109—165 (1931).

Unter ausschließlicher Benutzung synthetischer Hilfsmittel werden Involutionen I_n , d. h. symmetrische lineare Verwandtschaften zwischen n binären Veränderlichen untersucht, die eine geometrische Deutung als Parameter auf rationalen Kurven in der Ebene und im Raume finden. Auf einer solchen „Fundamentalkurve“ werden Involutionen durch bestimmte lineare Systeme algebraischer Kurven oder Flächen ausgeschnitten. Eine I_n wird durch n Punkt- n -tupel bestimmt. Es stellen sich daher die beiden Grundaufgaben: In einer I_n , die durch n Punkt- n -tupel definiert ist, zu $n - 1$ vorgegebenen Punkten den n -ten zu finden und die gemeinsamen Punkt- n -tupel mehrerer, durch je n Punkt- n -tupel definierter I_n zu konstruieren. Nach Vorbemerkungen allgemeiner Art werden für die speziellen Fälle I_3 und I_4 mehrere Konstruktionen als Lösungen angegeben. Als Fundamentalkurven dienen dabei Kegelschnitt und Raumkurve 3. Ordnung, und der Leitgedanke der Konstruktionen besteht darin, die Involutionen durch möglichst einfache Kurven- und Flächensysteme aus der Fundamentalkurve auszuschneiden. Die genannten Grundkonstruktionen finden mannigfache Anwendungen bei der Bearbeitung folgender Aufgaben: Eine ebene Kurve 3. Ordnung ist durch 9 Punkte bestimmt, durch 5 (2) davon ein Kegelschnitt (eine Gerade). Der Restschnittpunkt der beiden Kurven wird gesucht. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür anzugeben, daß 10 Punkte einer ebenen Kurve 3. Ordnung angehören. Den 9. Schnittpunkt zweier Kurven 3. Ordnung zu finden. Kegelschnitte zu konstruieren, die eine Kurve 3. Ordnung in vorgeschriebener Weise berühren. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür anzugeben, daß 13 Punkte, einer davon als Doppelpunkt, einer ebenen Kurve 4. Ordnung angehören. Den 4. Schnittpunkt einer durch 9 Punkte definierten Fläche 2. Ordnung und eines durch 3 dieser Punkte laufenden Kegelschnittes zu finden und eine Bedingung dafür anzugeben, daß 10 Punkte einer Fläche 2. Ordnung angehören. Den 4. Schnittpunkt einer durch 8 Punkte definierten Raumkurve 4. Ordnung erster Art mit einer durch 3 dieser Punkte laufenden Ebene zu konstruieren. Die 3 letzten Schnittpunkte einer durch 14 Punkte bestimmten ebenen Kurve 4. Ordnung mit einem durch 5 dieser Punkte laufenden Kegelschnitt zu finden und eine Bedingung dafür anzugeben, daß die Kurve einen 15. Punkt enthält.

E. A. Weiss (Bonn).

Green, H. G., et L. E. Prior: Involutions avec un point cuspidal libre sur la courbe de base. *J. École polytechn.* Paris, II. s. H. 28, 167—171 (1931).

In einer der oben referierten Abhandlung vorausgehenden Arbeit [L. Pomey, a. a. O. 27 (1929)] waren allgemeine Sätze über Involutionen I_n abgeleitet worden. In der vorliegenden Note wird untersucht, wie diese Sätze vervollständigt werden müssen, wenn die Fundamentalkurve „freie“, d. h. solche Spitzen besitzt, die nicht Basispunkte des zur I_n gehörigen linearen Kurvensystems sind. Das Hauptresultat lautet: Wenn die Fundamentalkurve eine Spitze besitzt, so fallen in diese $n - 1$ der n aus n -fach zählenden Punkten bestehenden Punkt- n -tupel der I_n . Die Fundamentalkurve einer I_n kann daher im allgemeinen nicht mehr als eine freie Spitze besitzen. *Weiss.*

Babbage, D. W.: A series of rational loci with one apparent double point. *Proc. Cambridge philos. Soc.* 27, 399—403 (1931).

Es wird die rationale V_n^{2n+1} eines Raumes S_{2n+1} betrachtet, welche auf einem S_n mit dem Linearsystem aller Hyperflächen 3. Ordnung dargestellt wird, die die Schnitt- V_{n-2}^4 von zwei Hyperflächen 2. Ordnung enthalten. Durch jeden Punkt allgemeiner Lage des S_{2n+1} geht eine einzige Sehne der V_n^{2n+1} hindurch; der Beweis ist analytisch induktiv (die Eigenschaft ist für $n = 1, 2$ wohlbekannt). Auf der V_n^{2n+1} liegen ∞^1 Hyperflächen 2. Ordnung V_{n-1}^2 ; die $\infty^1 S_n$, die solche V_{n-1}^2 enthalten, bilden eine V_{n+1}^{n+1} . Es werden endlich die geraden Linien auf V_n^{2n+1} betrachtet; einige von diesen, die eine $R_{n-1}^{4(n-1)}$ bilden, haben als Bilder auf S_n die einzelnen Punkte der V_{n-2}^4 -Basis des Systems von Hyperflächen 3. Ordnung. *E. G. Togliatti* (Genua).

Babbage, D. W.: Involutions of pairs of points in three dimensions determined by cubic surfaces. *Proc. Cambridge philos. Soc.* 27, 404—420 (1931).

Zweck dieser Arbeit ist die Betrachtung einiger rationalen Involutionen im gewöhnlichen dreidimensionalen Raume, die man mit linearen ∞^3 Systemen von Flächen 3. Ordnung definieren kann, im Falle, daß drei beliebige Flächen des Systems nur zwei bewegliche Schnittpunkte haben: solche Schnittpunktpaare sind eben die entsprechenden Punktpaare einer involutorischen Raumverwandtschaft. Es werden mehrdimensionale Betrachtungen gebraucht: die Punktpaare der Involution werden als Projektionen der Punktpaare einer Involution auf einer geeigneten dreidimensionalen Mannigfaltigkeit eines Raumes mit mehr als drei Dimensionen konstruiert; und so ist es leicht die Ordnung und die wichtigsten Eigenschaften der Involution zu bestimmen. Es werden folgende Fälle untersucht, von denen einige zu bekannten Involutionen führen: 1. Flächen 3. Ordnung F^3 , die einen gegebenen Punkt und eine gegebene Raumkurve 6. Ordnung C^6 mit dem Geschlecht 4 enthalten; 2. F^3 durch zwei Punkte und eine C^5 mit dem Geschlecht 2 (und allgemeiner: V_{n-1}^{2n+1} eines S_n , die zwei Punkte und eine gewisse V_{n-2}^4 enthalten); 3. F^3 durch drei Punkte und eine C^4 zweiter Art; 4. F^3 durch vier Punkte und drei Geraden; 5. F^3 , die eine räumliche C^3 enthalten, und die sich in zwei gegebenen Punkten berühren; 6. F^3 , die einen gegebenen Punkt und eine gegebene C^4 erster Art enthalten, und die sich in einem Punkt berühren; 7. F^3 , die einen Punkt und eine ebene C^3 enthalten, und die sich in einem gegebenen Punkt oskulieren; 8. F^3 , die einen Kegelschnitt enthalten, und die sich in zwei gegebenen Punkten bzw. berühren und oskulieren; 9. F^3 , die zwei Punkte und eine Gerade enthalten, und die sich in einem gegebenen Punkt überoskulieren; 10. F^3 , die zwei Punkte und zwei Geraden enthalten, und die sich in einem Punkte oskulieren; 11. F^3 , die einen Kegelschnitt, eine Gerade und zwei Punkte enthalten, und die sich in einem gegebenen Punkte einfach berühren; 12. F^3 , die eine gegebene Gerade enthalten, und die sich in zwei gegebenen Punkten oskulieren; 13. F^3 , die sich in zwei gegebenen Punkten bzw. oskulieren und überoskulieren; 14. F^3 , die einen gegebenen Punkte enthalten, und die sich in zwei gegebenen Punkten und längs einer Geraden einfach berühren. *Togliatti* (Genua).

Bricard, Raoul: Sur les systèmes „équilibrés“ de quatre droites et sur les cubiques gauches. *Bull. Soc. math. France* 59, 1—16 (1931).

Mit Aa werde der durch den freien Vektor a auf der Geraden A bestimmte Stab

(vecteur glissant) und mit (Aa, Bb) das Moment der beiden Stäbe Aa und Bb bezeichnet. 4 Stäbe $A_i a_i$ — und damit auch ihre Trägergeraden A_i — werden dann ein système équilibré genannt, wenn ihre Summe verschwindet und wenn zwischen ihren Momenten die Relationen:

$$(A_0 a_0, A_i a_i) + (A_j a_j, A_k a_k) = 0 \quad (i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2)$$

bestehen. Von 4 Geraden eines solchen Systems können 3 willkürlich vorgegeben werden. Die 4. ist dann durch ihre Richtung eindeutig bestimmt. Die Geraden, die A, B, C zu einem système équilibré ergänzen, bilden daher eine Kongruenz. Es wird gezeigt, daß es sich um die Sehnenkongruenz der kubischen Raumkurve handelt, welche die vorgegebenen Geraden zu Asymptoten hat. Nach einem Satze von Cremona kann man durch eine kubische Hyperbel 4 Rotationshyperboloide legen. Von den Hauptachsen dieser Hyperboloide wird bewiesen, daß sie 1. selbst ein système équilibré bilden und daß 2. jede von ihnen die 3 Asymptoten einer gewissen Raumkurve 3. Ordnung zu einem solchen System ergänzt. *E. A. Weiss* (Bonn).

Weiss, E. A.: Über ein Bild der R_4 -Konfiguration $(10_6 15_4)$ im Linienraum. *J. f. Math.* **164**, 256—258 (1931).

Vier Geraden [1], [2], [3], [4] allgemeiner Lage im R_4 bestimmen nach C. Segre eindeutig eine fünfte [0], die von den ersten vier linear-abhängig ist. Diese kann nach Segre ganz einfach konstruiert werden mit Hilfe der Verbindungsräume $(i k)$ von je zwei Geraden und ihrer Schnittgeraden $[i k l]$, welche je die Geraden $[i]$, $[k]$ und $[l]$ schneiden. Zieht man nachträglich noch die Räume $(0 k)$ und die Geraden $[0 k l]$ heran, so entsteht eine Konfiguration $10_6 15_4$. Diese Konfiguration wird nun vom Verf. auf eine Konfiguration des R_3 abgebildet, indem eine Hyperfläche M^2 des R_4 durch die Geraden [1], [2], [3], [4] gelegt wird und sodann die Punkte des M^2 in bekannter Weise auf die Strahlen eines linearen Komplexes abgebildet werden. Der Schließungssatz, auf dem die Existenz der Segreschen Konfiguration beruht, wird dabei auf einen Satz von H. Schroeter über Möbiussche Tetraeder zurückgeführt. *van der Waerden*.

Wong, B. C.: On the number of apparent double points of r -space curves. *Bull. amer. math. Soc.* **37**, 421—423 (1931).

Wenn die Raumkurve C^N die Schnittkurve von $r-1$ Hyperflächen n_1, n_2, \dots, n_{r-1} -ter Ordnung im r -dimensionalen Raume ist, dann ist nach Veronese die Anzahl h der scheinbaren Doppelpunkte

$$h = \frac{1}{2} n_1 n_2 \dots n_{r-1} (n_1 n_2 \dots n_{r-1} - \sum n_i + r - 2).$$

Der Verf. hat die obige Tatsache folgendermaßen verallgemeinert: Wenn die Raumkurve C^N ($N = n_1 n_2 \dots n_q$) nicht die Schnittkurve der $r-1$ Hyperflächen, sondern die Schnittkurve der q ($< r-1$) Mannigfaltigkeiten $V_{r_1}^{n_1}, V_{r_2}^{n_2}, \dots, V_{r_q}^{n_q}$ bzw. von der Ordnung n_1, n_2, \dots, n_q und bzw. von der Dimension r_1, r_2, \dots, r_q ist, wobei $r_1 + r_2 + \dots + r_q = r(q-1) + 1$ ist, dann ist die Anzahl h der scheinbaren Doppelpunkte

$$h = \frac{1}{2} n_1 n_2 \dots n_q (n_1 n_2 \dots n_q - \sum n_i + q - 1) + n_1 n_2 \dots n_q \sum h_i / n_i.$$

Hierbei ist h_i die Anzahl der scheinbaren Doppelpunkte der Kurve C^{n_i} , welche die Schnittkurve von $V_{r_i}^{n_i}$ durch die lineare Mannigfaltigkeit S_{r-r_i+1} ist.

T. Kubota (Sendai).

Plamitzera, A.: Fläche 5. Ordnung mit einer doppelten kubischen Raumkurve. *Prace mat.-fiz.* **38**, 79—125 u. dtsh. Zusammenfassung 125—128 (1931) [Polnisch].

Seien gegeben 3 Ebenenbündel $(W), (W_1), (W_2)$ und eine kollineare Verwandtschaft zwischen (W_1) und (W_2) , sowie eine quadratische birationale Verwandtschaft zwischen (W) und (W_2) . Der geometrische Ort der Schnittpunkte entsprechender Ebenen der 3 Bündel ist eine Fläche Ψ^5 5. Ordnung mit einer doppelten kubischen Raumkurve S_{12}^3 ; die letztere ist das Erzeugnis der Schnittpunkte entsprechender Geraden der Bündel (W_1) und (W_2) . 2 beliebige Punkte von S_{12}^3 können bei dieser Erzeugung von Ψ^5 zu Mittelpunkt der Bündel (W_1) und (W_2) gewählt werden, während für den Mittelpunkt von (W) 165 Lagen zulässig sind. Die Fläche Ψ^5 besitzt 11 Geraden,

lauter Bisekanten von S_{12}^3 , und 55 Kegelschnitte; jeder Kegelschnitt C^2 von Ψ^5 trifft (je 1 mal) 2 Geraden der Fläche (seine Stützgeraden). Wenn man von den 11 Geraden der Fläche Ψ^5 3 auswählt und die 3 Kegelschnitte von Ψ^5 konstruiert, die je 2 von diesen Geraden zu Stützgeraden haben, schneiden sich die Ebenen der 3 Kegelschnitte in einem Punkt, der zum Mittelpunkt des Bündels (W) gewählt werden kann. Ebene Schnitte von Ψ^5 , sowie auf Ψ^5 liegende rationale Raumkurven werden eingehend betrachtet. Čech (Brno).

Todd, J. A.: On the determination of plane curves by means of assigned singularities. Proc. Cambridge philos. Soc. 27, 291—305 (1931).

Dans ce travail, l'auteur se propose essentiellement de donner une condition suffisante pour qu'une courbe algébrique plane Γ , de degré N , de genre Π et passant par des points donnés O_1, O_2, \dots, O_e avec des multiplicités données I_1, I_2, \dots, I_e (les tangentes en ces points étant distinctes et quelconques) soit irréductible. Π étant positif, faisons les hypothèses suivantes: a) les points O_σ , pris avec les multiplicités I_σ , présentent des conditions indépendantes pour les courbes de degré N , et le degré de liberté virtuel E de ces courbes n'est pas négatif; b) les points O_σ , présentent des conditions indépendantes pour les courbes Σ de degré $N - 3$ passant $I_\sigma - 1$ fois par chaque point O_σ (adjointes); c) il n'existe pas de courbes d'ordre $N - 3 - \nu$ passant $I - 1 - i_\sigma$ fois par O_σ , de degré de liberté effectif nul, pour lesquelles l'excès δ' des ces points (nombre de relations entre les conditions imposées par ces points aux courbes) est égal à $\nu(N - 3 - \nu) - \sum i_\sigma(I_\sigma - 1 - i_\sigma)$ ($\nu \leq N - 3$, $i_\sigma \leq I_\sigma - 1$) sans que $\delta' = 0$. Moyennant ces hypothèses, l'auteur démontre que: la courbe générique du système des courbes Γ est irréductible, ou bien l'on a $E = 0$, et Γ est une courbe elliptique multiple. Si les courbes Γ considérées sont de genre zéro, l'énoncé se trouve modifié: la condition c) est remplacée par une autre assez analogue, et la courbe générique du système est toujours irréductible. La démonstration dans le cas général ($\Pi > 0$) repose sur un critère d'irréductibilité pour une courbe algébrique déterminée par le système de ses adjointes. Bien entendu, les résultats énoncés sont seulement valables moyennant certaines restrictions sur la disposition des points donnés: par exemple, trois points tels que la somme des multiplicités correspondantes soit supérieure à N , ne doivent pas se trouver en ligne droite, etc. Dubreil (Göttingen).

Differentialgeometrie, Riemannsche Geometrie, Tensoranalysis:

Mukhopadhyaya, S.: Circles incident on an oval of undefined curvature. Tôhoku math. J. 34, 115—129 (1931).

Es werden Krümmungseigenschaften der geschlossenen ebenen konvexen Kurven untersucht. Hierbei wird von den Kurven angenommen, daß sie mit stetiger Tangente versehen sind. Existenz der Krümmung wird jedoch nicht vorausgesetzt. Unter dem oberen (unteren) Krümmungskreis der Kurve V im Punkt P wird derjenige V in P berührende Kreis verstanden, dessen Radius gleich der unteren (oberen) Grenze der Radien der in P von außen (innen) berührenden Kreise ist. Die obere bzw. untere Grenze der oberen bzw. unteren Krümmungsradien für alle Punkte von V sei \bar{r} bzw. \underline{r} . Unter einem eigentlichen Oskulationskreis in P wird ein Kreis verstanden, der V in P berührt und gleichzeitig durchsetzt. Geht er von außen nach innen, wenn er im Sinne der orientiert angenommenen Kurve durchlaufen wird, so heißt er positiv, sonst negativ. Von den Ergebnissen der Arbeit seien genannt: 1. Ein Kreis, dessen Radius $\leq \underline{r}$ ist, kann ungehindert in V rollen. V kann ungehindert in einem Kreis mit Radius $\geq \bar{r}$ rollen. (Verallgemeinerung eines für Kurven mit stetiger Krümmung bekannten Satzes.) 2. Auf V gibt es mindestens 2 Punkte mit positivem und mindestens 2 Punkte mit negativem eigentlichen Oskulationskreis, dessen Flächeninhalt (Umfang) gleich dem des Ovals ist. 3. Wenn ein Kreis vom Radius r die Kurve V $2n$ -mal durchsetzt, so gibt es wenigstens $n - 1$ Punkte mit positiven und wenigstens $n - 1$ Punkte mit negativen eigentlichen Oskulationskreisen vom Radius r . — Eng verwandte Untersuchun-

gen mit teilweise weitergehenden Ergebnissen finden sich schon bei H. Bohr und B. Jessen [Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, Naturvid. og math. Afd., 8. R. 12, 325—406 (1929)] und B. Jessen (Matematisk Tidsskrift, B 1929, 50—62).

W. Fenchel (Kopenhagen).

Delens, Paul: *Congruences orthoptiques et congruences isotropes.* C. r. Acad. Sci. Paris 192, 1623—1625 (1931).

Continuando i suoi studi sulle congruenze di curve e sfruttando le formule vettoriali stabilite nelle precedenti comunicazioni, l'A. studia: a) le congruenze ortoptiche, cioè ottenute come intersezioni di due famiglie di superficie ortogonali dipendenti da un parametro e di cui assegna due invarianti, generalizzando così alcuni classici risultati di Lamé; b) le congruenze isotrope, non necessariamente rettilinee come quelle di Ribaucour, o di cerchi studiate da A. Bloch; esse sono caratterizzate dall'annullarsi di uno dei due invarianti assegnati in a). L'A. assegna anche sotto nuova ed elegante formula vettoriale le condizioni di isotropia e dimostra che tutte le congruenze isotrope risultano dalla intersezione di sviluppabili isotrope, appartenenti a due famiglie dipendenti da un parametro complesso.

R. Marcolongo (Napoli).

Hlavatý, V.: *Projektive Invarianten einer Kurvenkongruenz und einer Kurve.* Math. Z. 34, 58—73 (1931).

Es wird ein n -dimensionaler, mit einer nur bis auf bahntreue Transformationen vorgegebenen symmetrischen Übertragung Γ_{ij}^k versehener Raum \mathfrak{A}_n zugrunde gelegt. Jeder „Dichte“ δ vom Gewicht -1 kann man eindeutig eine von diesen Übertragungen Γ_{ij}^k entsprechen lassen. Ist nun im \mathfrak{A}_n eine allgemeine Kurvenkongruenz gegeben, so kann man ihr eine ganz bestimmte Dichte in \mathfrak{A}_n zuordnen, und man gelangt so leicht zu einem System von Frenetschen Ableitungsformeln. Wesentlich schwieriger ist der Fall, wo nur eine einzige (allgemeine) Kurve vorgegeben ist. Hier gelingt es dem Verf., nach Einführung einer überzähligen Koordinate x^0 die projektivkovariante Derivation längs der Kurve zu definieren, was dann zur Einführung eines ausgezeichneten Kurvenparameters („projektiven Kurvenbogens“) führt und die Aufstellung der Ableitungsformeln ermöglicht.

Čech (Brno).

Süss, Wilhelm: *Über wechselseitig affinparallele Flächen.* Math. Z. 34, 158—160 (1931).

L'auteur donne une démonstration nouvelle et plus simple de l'équation de la détermination des surfaces introduites il y a 4 ans par lui même [Math. Ann. 98, 313—320 (1927)] et par M. W. van der Woude [Math. Z. 26, 186—195 (1927)] et nommées au titre de la Note. C'est le couple de surfaces dont la distance affine au sens de M. Blaschke (Differentialgeometrie II Berlin 1923) entre deux points correspondants est constante, calculons la au point de vue de la première surface ou à celui de la seconde. La démonstration repose sur les propriétés de la géométrie relative de la surface, les deux surfaces étant rapportées aux lignes de courbure relatives de l'une surface par rapport à l'autre qui se confondent d'ailleurs avec les lignes du réseau conjugué commun des deux surfaces. En termes de la géométrie relative le théorème démontré obtient l'élégant énoncé: deux surfaces possèdent la propriété en question si la courbure relative de l'une surface par rapport à l'autre est constante et vice versa. Finikoff.

Calapso, R.: *Studi sintetici di geometria proiettiva differenziale.* Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 13, 350—353 (1931).

The starting point of the author is the following remark. Take a surface S and the two asymptotic lines through a point P on S . Let R be the developpable tangent surface to one of the asymptotic lines l , and g the tangent to l at P . Then there exists one linear complex which has in g 5 coincident lines in common with R , and a linear family of such complexes which have 4 lines in common. The same holds for the other asymptotic line through P . Now there exists one and only one linear complex in each family in such a way that the linear congruence in common has a given arbitrary straight line T through P as directrix. Each of these selected linear complexes defines

a null system, and let π be the projectivity defined by these two null systems. Then the author studies the properties of π in the general case and also in the cases in which T is the first directrix of Wilczynski or the edge of Green. *Struik* (Cambridge).

Whitehead, J. H. C.: The representation of projective spaces. *Ann. of Math.*, II. s. 32, 327—360 (1931).

Ein affiner Raum von $n + 1$ Dimensionen, A_{n+1} , kann zur „Darstellung“ eines projektiven n -dimensionalen Raumes P_n benutzt werden, wenn es möglich ist, einen seiner Vektoren ξ^α den Bedingungen:

$$\left. \begin{array}{l} (a) \xi^\alpha; \beta = \delta^\alpha_\beta, \\ (b) R^\alpha_{\beta\gamma\lambda} \xi^\lambda = 0 \end{array} \right\} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \lambda = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (1, 5)$$

zu unterwerfen. Dabei ist unter $R^\alpha_{\beta\gamma\lambda}$ der aus den projektiven Zusammenhangskomponenten $\Pi^\alpha_{\beta\gamma}$ gebildete projektive Krümmungstensor und unter $(;)$ die kovariante Ableitung relativ $\Pi^\alpha_{\beta\gamma}$ zu verstehen. Es besteht dann die Möglichkeit in A_{n+1} Koordinaten x^0, x^1, \dots, x^n zu verwenden, bezüglich welcher die Zusammenhangskomponenten $\Pi^\alpha_{\beta\gamma}$ gewissen gegenüber der Transformationsgruppe der Vebelschen projektiven Differentialgeometrie invarianten Bedingungen genügen. Anschließend an diese ersten Ergebnisse seiner Arbeit stellt sich Verf. die Aufgabe, besondere sog. „Normaldarstellungen“ anzugeben. Bezieht man die Differentialgleichungen der Bahnkurven der Übertragung auf derartige projektive Normalkoordinaten $z^0, z^1, z^2, \dots, z^n$, so erhalten ihre Lösungen die einfache Gestalt:

$$\left. \begin{array}{l} e^{\sigma^0} z^i = p^i t, \\ e^{\sigma^0} = p^0 t + 1 \end{array} \right\} \quad (3, 3) \quad \text{bzw.} \quad z^i = \frac{p^i t}{p^0 t + 1} = p^i \sigma; \quad \sigma = \frac{t}{p^0 t + 1}, \quad (3, 4)$$

wodurch in einfacher Weise „affine“ (σ) bzw. „projektive“ (t) Bahnkurvenparameter gewonnen werden. Nach einer Reihe weiterer Entwicklungen von Eigenschaften und Verwendungsmöglichkeiten homogener und nichthomogener Normalkoordinaten (Transformations-eigenschaften, Potenzreihenentwicklungen der x^α als Funktionen der z^α usw.) behandelt Verf. Äquivalenzfragen. 2 projektive Zusammenhänge $\Pi^\alpha_{\beta\gamma}$ und $\bar{\Pi}^\alpha_{\beta\gamma}$ (derselben Darstellung in möglicherweise verschiedenen Punkten) heißen affinäquivalent, wenn Π in $\bar{\Pi}$ vermöge einer analytischen Punkttransformation der $n + 1$ Variablen x^0, x^1, \dots, x^n übergeführt werden kann, und heißen projektiväquivalent, wenn es möglich ist, diese Überführung durch Gleichungen, welche die Gestalt Vebelscher Transformationen haben, zu leisten. Verf. beweist den Satz: Wenn 2 projektive Zusammenhänge affinäquivalent sind, dann sind sie auch projektiväquivalent. Nach einer Untersuchung nichtholonomer Darstellungen behandeln die letzten Abschnitte der Arbeit sog. „normierte“ projektive Zusammenhänge. Ein normierter projektiver Zusammenhang im Raum von n Dimensionen läßt sich durch einen affinen Zusammenhang (innerhalb $n + 1$ Dimensionen) charakterisieren, für welchen — abgesehen von den Bedingungen (1, 5) — der verjüngte projektive Krümmungstensor $R^\alpha_{\beta\gamma} = R^\alpha_{\beta\alpha\gamma}$ verschwindet. Eine Darstellung, in welcher für die Zusammenhangskomponenten:

$$\Pi^\alpha_{aj} = 0 \quad (\alpha, j = 1, 2, \dots, n) \quad (10, 5)$$

gilt, nennt Verf. eine „ausgezeichnete“ Darstellung. Innerhalb dieser Begriffsbildungen bestehen noch die Sätze: Jede Normaldarstellung eines normierten projektiven Zusammenhangs ist eine ausgezeichnete Darstellung; 2 affinäquivalente normierte projektive Zusammenhänge, bezogen auf eine ausgezeichnete Darstellung, sind äquivalent gegenüber gewissen speziellen Vebelschen Transformationen. Sofern ein Punkt im projektiven P_n durch seine Koordinatenwerte x^1, x^2, \dots, x^n und irgendeinen Wert des „Faktors“ x^0 bestimmt ist, kann man diesen Punkten in „Darstellungsräumen“ R_n Kurven mit dem Parameter x^0 zuordnen; sie werden „Strahlen“ genannt und geben Anlaß zu einer Reihe weiterer terminologischer und sonstiger Ergänzungen, auf welche hier aus Raummangel nicht näher eingegangen werden kann.

M. Pinl (Berlin).

Schouten, J. A., und E. R. van Kampen: Über die Krümmung einer V_m in V_n ; eine Revision der Krümmungstheorie. *Math. Annalen* 105, 144—159 (1931).

Die Arbeit behandelt das Formenproblem der m -dimensionalen Mannigfaltigkeiten des R_n konstanter Krümmung, d. h. das Problem der Bestimmung einer V_m (bis auf Kongruenz und Spiegelung) durch ein System von Differentialformen (Tensoren). Es handelt sich also um die denkbar weitestgehende Verallgemeinerung des Bonnetschen Satzes der elementaren Differentialgeometrie. Das Problem wurde von C. Burstin (Minsk), dessen Name von dem Verf. anscheinend übersehen wurde, und W. Mayer gelöst („Das Formenproblem der l -dimensionalen Hyperflächen in n -dimensionalen Räumen konstanter Krümmung“, *Mh. f. Math. u. Physik* 34, 1927; vgl. auch Duschek-

Mayer, Lehrbuch der Differentialgeometrie 2, 201 ff.). Die vorliegende Arbeit bringt im wesentlichen eine Übertragung des Burstin-Mayerschen Beweises in Schoutens Methoden und Schreibweise. Nach einigen vorbereitenden Ausführungen werden Krümmungsaffinoren H definiert, in deren Einführung der hauptsächlichste Unterschied gegenüber Burstin und Mayer besteht, und die Ableitungsgleichungen aufgestellt. Es folgen die Integrabilitätsbedingungen und schließlich die als Krümmungstheorie bezeichnete Berechnung von Größen L' , die die V_m bestimmen. Eine in der Schlußbemerkung behandelte Frage hat W. Mayer bereits vor einigen Jahren beantwortet („Über das vollständige Formensystem der F_l im R_n “, Mh. f. Math. u. Physik 35, 1928).

Mit den in der Einleitung gegebenen Einwänden gegen die Burstin-Mayersche Methode kann sich Ref. nicht einverstanden erklären. Diese Einwände richten sich vor allem gegen das von den Verff. (S. 153) als merkwürdig bezeichnete System der $(\alpha\beta)C_p$, die aber, wie aus der Bezeichnung hervorgeht, kovariante Vektoren sind, deren Komponenten als Koeffizienten in den Ableitungsgleichungen

$$\frac{d_{(\alpha)}\lambda_i}{dy_p} = (\alpha\beta)C_p(\beta)\lambda_i$$

auftreten (vgl. insbesondere S. 207 und 226 des oben erwähnten Buches). A. Duschek (Wien).

Sen, R. N.: On curvatures of a hypersurface. Bull. Calcutta math. Soc. 23, 1—10 (1931).

Der Riemannsche Raum V_n mit dem Maßtensor (g_{ik}) sei in den V_{n+1} eingebettet. Die „zweite Fundamentalförm“ von V_n bezüglich V_{n+1} sei (b_{ik}) . Als Hauptkrümmungen von V_n seien wie üblich die stationären Werte $\frac{1}{r_p}$ des Ausdrucks $\frac{1}{r} = \frac{b_{ik}\xi^i\xi^k}{g_{ik}\xi^i\xi^k}$ bezeichnet, wenn (ξ^i) alle Vektoren von V_n in einem Punkt durchläuft. Die elementar-symmetrischen Funktionen der Krümmungen seien $K_1 = \sum \frac{1}{r_p}$, $K_2 = \sum \frac{1}{r_p r_q}$, ..., $K_n = \sum \frac{1}{r_1 r_2 \dots r_n}$. Dann werden zunächst in naheliegender Weise die K_i durch Unterdeterminanten der g_{ik} und b_{ik} ausgedrückt. Falls zwischen den K_i eine identische Relation besteht (Verallgemeinerung der Weingartenschen Flächen), so ist das äquivalent mit dem Verschwinden einer Determinante, deren Elemente rational von den g_{ik} , den b_{ik} und den in V_n gebildeten kovarianten Ableitungen der b_{ik} abhängen. Die Herleitung der nun folgenden Formeln S. 3, u. und S. 4, o. ist Ref. nicht verständlich (vielleicht infolge von Druckfehlern). Verf. setzt $b_{ih}b_{ik}g^{il} = a_{hk}$ und definiert Größen $c_{hk}^{(s)}$ durch die Rekursion $c_{hk}^{(1)} = b_{hk}$, $c_{hk}^{(2)} = g_{hk}$, $c_{hk}^{(s)} = g_{ih}g_{ik}c_{mn}^{(s-2)}b^{im}b^{kn}$. Dann wird behauptet:

$a_{hk} = \sum_{s=1}^n (-1)^{s-1} c_{hk}^{(s)} \zeta^s$. Der Riemannsche Raum V'_n mit dem Maßtensor a_{ik} wird als zu V_n assoziiert bezeichnet; in der Tat reduziert sich V'_n auf das sphärische (bzw. hypersphärische) Bild, falls V_{n+1} euklidisch ist. Ist ζ^i ein beliebiger Einheitsvektor in V_n , der mit den Krümmungsrichtungen von V_n die Winkel Θ_p bildet, so wird als verallgemeinerte Eulersche Formel die Relation aufgestellt: $c_{hk}^{(s)} \zeta^h \zeta^k = \sum_{p=1}^n r_p^{s-2} \cos^2 \Theta_p$ ($s = 1, \dots, n$). Ist die Beziehung zwischen V_n und V'_n winkeltreu, so sind 2 Fälle möglich: Entweder $r_1 = \dots = r_n$, oder falls n grade ist und keine der Krümmungen $1/r_p$ verschwindet: $K_1 = K_2 = \dots = K_{n-1} = 0$ (verallgem. Minimalflächen). Wenn V_{n+1} konstante Krümmung hat, lassen sich die Differenzen der Krümmungstensoren von V_n und V'_n durch die kovarianten Ableitungen der b_{ik} ausdrücken. K_n erweist sich als das Volumvergrößerungsverhältnis zwischen V'_n und V_n . Weitere Formeln werden für den Fall aufgestellt, daß V_{n+1} euklidisch ist.

Stefan Cohn-Vossen (Köln).

Michal, A. D.: An operation that generates absolute scalar differential invariants from tensors. (California Inst. of Technol., Pasadena.) Tôhoku math. J. 34, 71—77 (1931).

1. $e^a(x)$ sind n linear unabhängige Vektoren, welche auch von der Wahl des Koordinatensystem nicht abhängen, und \hat{e}_λ die zugehörigen kov. Vektoren, so daß $e^a \hat{e}_\lambda = \delta^a_\lambda$. Jedem System (x) läßt sich ein System (y) von „Normalkoordinaten“ zuordnen:

$$x^\nu = x^0 + (e^\nu)_0 y^a - \frac{1}{2!} (I^\nu_{\lambda\mu} e^\lambda e^\mu)_0 y^a y^b x. \quad (x = 0 \text{ oder } 1) \quad (1)$$

Somit gilt für die Komponenten eines kovarianten Vektors im Punkte $P(x = x^0)$

$${}^*v_a(y) = e^{\lambda}_a v_\lambda(x) \quad (2a)$$

3. Diesen Tatbestand benützt der Autor zur Berechnung des geodätischen Dreieckes ABC in V_n . Z. B. läßt sich die A gegenüberliegende Seite a durch

$$a^2 = b^2 - 2bc \cos \hat{A} + c^2 + R + Q$$

ausdrücken. Dabei ist R eine, vom Autor ausgerechnete Funktion von b, c, \hat{A} und $K_{\omega\mu\lambda\nu}$, während Q eine Funktion 7. Grades in b, c ist. Hlavatý (Prag).

Hayden, H. A.: Deformations of a curve, in a Riemannian n -space, which displace certain vectors parallelly at each point. Proc. Lond. math. Soc., II. s. 32, 321–336 (1931).

Es werden solche infinitesimale Verrückungen V einer Kurve C eines Riemannschen Raums R_n untersucht, bei der die Tangenten t von C durchweg Parallelverschiebungen erleiden. Sind t, n_1, \dots, n_{n-1} die Einheitsvektoren, die das Frenetsche n -Bein von C in einem laufenden Punkt aufspannen, so wird der Verrückungsvektor in Komponenten c, c_1, \dots, c_{n-1} nach den Beinvektoren zerlegt, und es ergibt sich: Diese Komponenten sind $n-1$ linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung unterworfen, also ist eine Komponente willkürlich. Nur $c_{n-1} = 0$ darf i. A. nicht vorgegeben werden, weil dann alle c verschwinden. Beschränkt man sich auf „allgemeine“ Kurven, d. h. solche, bei denen keine der $n-1$ Krümmungen k_1 bis k_{n-1} verschwindet, und bestimmt man diejenigen Kurven, bei denen man die c konstant annehmen kann, so erhält man die „allgemeinen Schrauben“ (unter denen die Schraubenlinien des euklidischen R_3 enthalten sind):

$$\frac{k_{n-1}}{k_{n-2}} = \text{const}, \quad \frac{k_{n-3}}{k_{n-4}} = \text{const}, \dots$$

Für grades n heißt die letzte Gleichung dieses Systems $k_3/k_2 = \text{const}$; für ungerades n : $k_2/k_1 = \text{const}$. Der Verschiebungsvektor liegt in dem Unterraum, der von den Vektoren $n_{n-1}, n_{n-3}, n_{n-5} \dots$ im laufenden Kurvenpunkt aufgespannt wird, und die Variation der Bogenlänge verschwindet oder nicht, je nachdem n ungrade oder grade ist. — Ferner werden unter den Transformationen V die bestimmt, die die Bogenlänge ungeändert lassen. Die Verschiebungsvektoren v müssen dann gleichlang sein und ein längs C paralleles Vektorfeld bilden (Verallgemeinerung der euklidischen infinitesimalen Translation). Ist dagegen die Länge von v konstant und liegt keine verallgemeinerte Translation vor, so muß v stets auf t senkrecht stehen. Ist der R_n euklidisch, so erleiden durch V außer t auch die übrigen Vektoren des Frenetschen n -Beins Parallelverschiebungen. Verf. beweist auch die interessante Umkehrung: Wenn bei jeder Kurve eines Riemannschen Raums jede infinitesimale Verrückung, die die Tangenten parallel verschiebt, auch die anderen Beinvektoren parallel verschiebt, so ist der Raum euklidisch. Die Combescuretransformationen sind also in dieser Theorie als sehr spezieller Fall enthalten. Schließlich werden im euklidischen Fall neben den Kurven mit parallelen Tangenten (man braucht sich jetzt nicht auf infinitesimal benachbarte Kurven zu beschränken) auch Kurvenpaare betrachtet, bei denen irgendwelche anderen Vektoren der n -Beine parallel vorausgesetzt sind, oder allgemeiner bei denen Unterräume parallel sind, die von gewissen Teilsystemen der Beinvektoren aufgespannt werden. Man kann solche Teilsysteme angeben, daß dann die Parallelität für alle Beinvektoren folgt, z. B. wenn man den Raum ins Auge faßt, der von den p ersten Beinvektoren aufgespannt wird ($p < n$). Für beliebige Teilsysteme gilt der Satz nicht; im R_3 ergeben z. B. parallele Hauptnormalen Paare von Bertrandkurven, also Paare mit nichtparallelen Tangenten. Stefan Cohn-Vossen (Köln).

Hayden, H. A.: On a generalized helix in a Riemannian n -space. Proc. Lond. math. Soc., II. s. 32, 337–345 (1931).

Die Böschungslinien lassen sich dadurch definieren, daß die erste und zweite Krümmung festes Verhältnis haben, ferner dadurch, daß ihre Tangenten mit einer festen Richtung einen festen Winkel bilden. In vorliegender Arbeit werden für beide Definitionen Verallgemeinerungen für den Riemannschen R_n gegeben, und es wird

geprüft, wieweit sie sich auch hier decken. Die 1. Definition führt auf die „allgemeinen Schrauben“ (vgl. d. vorangehende Referat). Um die 2. Definition übertragen zu können, muß man statt von einer festen Richtung von einem längs der betrachteten Kurve C parallelen Vektorfeld r ausgehen. Fordert man, daß die Tangenten von C einen festen Winkel mit den Vektoren r bilden, so erhält man nur eine einzige Gleichung; sie führt im R_3 auf die Böschungslinien (vom Verf. wohl versehentlich mit helix bezeichnet), für $n > 3$ braucht man weitere Bedingungen, um auf die allgemeinen Schrauben zu kommen. Es wird deshalb gefordert, daß noch weitere Vektoren des Frenetschen n -Beins von C feste Winkel mit den Vektoren r bilden. Das Ergebnis ist verschieden, je nachdem n a) ungrade b) grade ist. a) Wenn $n_{n-1}, n_{n-3}, \dots, n_2$ feste Winkel mit r bilden, so auch t , die übrigen Beinvektoren n_{n-2} bis n_1 bilden ebenfalls feste Winkel mit r und zwar rechte, C ist eine allgemeine Schraube. Setzt man die Winkeleigenschaft statt dessen von $t, n_2, n_4, \dots, n_{n-3}$ voraus, so ist C ebenfalls eine allgemeine Schraube, und die übrigen Beinvektoren stehen zu r in derselben Winkelbeziehung wie bei der ersten Voraussetzung. Ist umgekehrt C eine allgemeine Schraube, so gibt es ein Feld längs C paralleler Vektoren r , zu dem das Frenetsche n -Bein von C in der angegebenen Winkelbeziehung steht. b) Es gibt keine Kurve C , deren Beinvektoren $t, n_2, n_4, \dots, n_{n-2}$ feste Winkel mit einem längs C parallelen Vektorfeld bilden, wenn man sich auf „allgemeine Kurven“ beschränkt. Erfüllbar wird die Bedingung, wenn man „ausgeartete“ Kurven zuläßt, deren letzte Krümmung k_{n-1} identisch verschwindet. Ebenso ist die Winkelbedingung für n_1, n_3, \dots, n_{n-1} nur durch ausgeartete Kurven realisierbar. Bezeichnen wir als Schraube 2. Art eine Kurve, für die gilt: $k_1/k_2 = \text{const}$, $k_3/k_4 = \text{const}, \dots, k_{n-1} = 0$, so gilt der Satz: C ist dann und nur dann Schraube 2. Art, wenn es ein längs C paralleles Vektorfeld r gibt, mit dem t, n_2, \dots, n_{n-2} feste Winkel bilden. Die übrigen Beinvektoren außer n_{n-1} stehen dann auf r senkrecht und n_{n-1} bleibt sich selbst parallel. Ein analoger Satz gilt, sowohl für grades als auch für ungrades n , für die Kurven $k_1/k_2 = \text{const}$, $k_3/k_4 = \text{const}$, $k_{2p-1} = k_{2p} = \dots = k_{n-1} = 0$.

Stefan Cohn-Vossen (Köln).

Boggio, T.: Relazione fra le omografie di Riemann relative a due spazi in rappresentazione conforme. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 13, 333–337 (1931).

Ist $g_{\lambda\mu}$ der Fundamentaltensor einer Riemannschen Konnexion und $'g_{\lambda\mu} = \sigma g_{\lambda\mu}$ der Fundamentaltensor einer anderen Riemannschen Konnexion, und setzt man $s_\mu = V_\mu \log \sigma$, so sind die Riemann-Christoffelschen Affinoren der beiden Konnexionen durch

$$\sigma^{-1} K_{\omega\mu\lambda\nu} = K_{\omega\mu\lambda\nu} - g_{[\omega} [s_{\mu]} s_{\lambda]}^{\nu}]^* \quad (1)$$

gebunden, wo

$$s_{\mu\lambda} = 2V_\mu s_\lambda - s_\mu s_\lambda + \frac{1}{2} s_\alpha s_\beta g_{\mu\lambda} g^{\alpha\beta}.$$

Der Autor beweist diese Formel mittels der Symbolik, welche in „Burgatti, Boggio, Burali-Forti: Geometria Differenziale“ (Zanichelli, Bologna 1930) und auch in „Boggio, Burali-Forti: Espaces courbes...“ (Soc. Tip. Ed. Naz. Torino 1924) benützt wird.

Hlavatý (Prag).

Andruetto, Giacinta: Relazione tra i simboli di Riemann relativi a due varietà, una immersa nell'altra. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 13, 338–341 (1931).

In einem Riemannschen Raume V_n sei ein anderer Riemannscher Raum $V_m (m < n)$ gegeben. Die Krümmungen der V_m und V_n sind durch den bekannten Gauss'schen Satz (Theorema egregium)

$$B_{\omega\mu\gamma\lambda}^{\beta\alpha\nu\delta} K_{\beta\alpha\delta}^{\gamma} = K_{\omega\mu\lambda}^{\nu} + 2H_{\lambda[\mu}^{\alpha} H_{\omega]}^{\nu} H_{\alpha}^{\gamma} \quad **$$

gebunden. In diesem Artikel wird diese Formel bewiesen, und zwar auf Grund der Symbolik, welche in „Burgatti, Boggio, Burali-Forti: Geometria differenziale“ (Zanichelli, Bologna 1930) benützt wird. Es soll ausdrücklich bemerkt werden, daß man bei dieser Symbolik voraussetzen muß, V_n sei in einem Euklidischen Raume eingebettet, was in dem gewöhnlichen Ricci-Kalkül nicht der Fall ist. Hlavatý (Prag).

* Schouten: Der Ricci-Kalkül. S. 168. Berlin: Julius Springer 1924.

** Schouten: Der Ricci-Kalkül. S. 198. Berlin: Julius Springer 1924.

Bortolotti, Enea: Directions concourantes et connexions dans les espaces courbes. Bull. Soc. math. France 59, 70—74 (1931).

Im euklidischen R_n liege eine V_m . Längs einer Kurve k in V_m werde eine Schar von Tangenten an V_m gelegt, die einerseits ein Richtungsfeld f in V_m längs k , andererseits eine Regelfläche g in R_n bestimmen. Es werden nun die intrinsiken Eigenschaften von f in der Metrik von V_m in Beziehung gebracht zu den Eigenschaften von g in der Metrik des R_n . Zu diesem Zweck wird eine zweite auf g verlaufende Kurve k' (courbe adjointe von k) folgendermaßen konstruiert: g_0 und g_1 seien benachbarte Geraden von g , g_0 möge k in P schneiden, R_m sei Tangentialraum an V_m in P . Dann sei h_1 die Orthogonalprojektion von g_1 auf R_m , Q_0 sei der Fußpunkt des gemeinsamen Lotes von g_0 und h_1 , bzw. der Schnittpunkt beider Geraden. Q sei die Grenzlage von Q_0 , wenn g_1 gegen g_0 geht. k' ist dann die Bahn von Q , wenn P die Kurve k durchläuft. Ist k' Orthogonaltrajektorie der Tangentialräume R_m , so werden die Richtungen von f als directions concourantes bezeichnet. Nach der Cartanschen Auffassung der euklidisch zusammenhängenden Räume wird nun durch die Metrik von V_m zwischen den benachbarten tangentialen R_m eine Abbildung vermittelt, die man als Grenzfall einer Orthogonalprojektion auffassen kann. Daher steht der Begriff der directions concourantes in enger Beziehung zur Riemannschen Metrik.

Cohn-Vossen (Köln).

Nalli, Pia: Trasporti rigidi di vettori negli spazi di Riemann. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 13, 669—675 (1931).

Sei $g_{\lambda\mu}$ der metrische Tensor der Riemannschen Konnexion mit den Christoffelschen Symbolen $\overset{0}{\Gamma}_{\lambda\mu}^\nu$. Dann ist auch

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\nu = \overset{0}{\Gamma}_{\lambda\mu}^\nu + T_{\lambda\mu}^\nu \quad (T = \text{ein beliebiger Affinor}) \quad (1a)$$

eine Konnexion, welche nur dann metrisch (mit dem Fundamentaltensor $g_{\lambda\mu}$) ist, wenn

$$T_{\nu\lambda\mu} + T_{\lambda\nu\mu} = 0. \quad (1b)$$

Das folgt aus

$$\overset{0}{V}_\omega g_{\lambda\nu} = \overset{0}{V}_\omega g_{\lambda\nu} - T_{\lambda\omega}^\alpha g_{\alpha\nu} - T_{\nu\omega}^\alpha g_{\lambda\alpha} = -(T_{\nu\lambda\omega} + T_{\lambda\nu\omega}).$$

Die Riemann-Christoffelschen Affinoren der beiden Konnexionen sind mittels

$$K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = \overset{0}{K}_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} - \overset{0}{V}_\omega T_{\lambda\mu}^\nu + \overset{0}{V}_\mu T_{\lambda\omega}^\nu + T_{\lambda\omega}^\alpha T_{\alpha\mu}^\nu - T_{\lambda\mu}^\alpha T_{\alpha\omega}^\nu *$$

gebunden. Somit ist die Konnexion (1) eine metrische mit Fernparallelismus, wenn

$$\overset{0}{K}_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = \overset{0}{V}_\omega T_{\lambda\mu}^\nu - \overset{0}{V}_\mu T_{\lambda\omega}^\nu - T_{\lambda\omega}^\alpha T_{\alpha\mu}^\nu + T_{\lambda\mu}^\alpha T_{\alpha\omega}^\nu.$$

Es wird auch die Konstruktion eines solchen Affinors T , der der letzten Gleichung Genüge leistet, angegeben.

Hlavatý (Prag).

Nalli, Pia: Trasporti rigidi di vettori sulle superficie. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 13, 734—739 (1931).

Ist g die Determinante des metrischen Fundamentaltensors $g_{\lambda\mu}$ und

$$A_{11} = A_{22} = 0, \quad A_{12} = -A_{21} = \sqrt{g}$$

ein antisymmetrischer Affinor, so kann man für $n = 2$ den Affinor T^* auch so wählen

$$\overset{1}{T}_{\nu\lambda\mu} = A_{\nu\lambda} \overset{1}{R}_\mu,$$

wenn $\overset{1}{R}_\mu$ ein beliebiger kovarianter Vektor ist. Somit hat man (außer $\overset{0}{\Gamma}_{\lambda\mu}^\nu$) eine andere metrische Konnexion

$$\overset{1}{\Gamma}_{\lambda\mu}^\nu = \overset{0}{\Gamma}_{\lambda\mu}^\nu + g^{\alpha\nu} A_{\alpha\lambda} \overset{1}{R}_\mu \quad (1)$$

und für $n = 2$

$$\begin{aligned} \overset{1}{K}_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} &= \overset{0}{K}_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} - \overset{0}{V}_\omega \overset{1}{T}_{\lambda\mu}^\nu + \overset{0}{V}_\mu \overset{1}{T}_{\lambda\omega}^\nu + \overset{1}{T}_{\lambda\omega}^\alpha \overset{1}{T}_{\alpha\mu}^\nu - \overset{1}{T}_{\lambda\mu}^\alpha \overset{1}{T}_{\alpha\omega}^\nu \\ &= \overset{0}{K}_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} - \overset{0}{V}_\omega \overset{1}{T}_{\lambda\mu}^\nu + \overset{0}{V}_\mu \overset{1}{T}_{\lambda\omega}^\nu. \end{aligned}$$

* Schouten: Der Ricci-Kalkül. S. 86. Berlin: Julius Springer 1924.

Aus dieser Gleichung folgt (immer für $n = 2$), daß (1) eine metrische Konnexion mit Fernparallelismus ist, wenn

$$\frac{\partial R_1}{\partial x^2} - \frac{\partial R_2}{\partial x^1} = K\sqrt{g}, \quad (K = \text{Gauss'sche Krümmung}). \quad (2)$$

Denkt man sich außer (1) noch eine andere Konnexion mit $\overset{2}{T}_{\nu\lambda\mu} = A_{\nu\lambda}\overset{2}{R}_\mu$ und verschiebt man einen Einheitsvektor längs einer Kurve L parallel im Sinne der beiden Konnexionen, so bekommt man in jedem Punkte P von L zwei Einheitsvektoren, deren Winkel α durch

$$\alpha = \int_P \left(\overset{1}{R}_\mu - \overset{2}{R}_\mu \right) dx^\mu \quad (3)$$

gegeben ist. (Es ist nämlich

$$d\overset{1}{i}^\nu = -\overset{1}{\Gamma}_{\lambda\mu}^\nu \overset{1}{i}^\lambda dx^\mu, \quad d\overset{2}{i}_\lambda = \overset{2}{\Gamma}_{\lambda\mu}^\nu \overset{2}{i}_\nu dx^\mu,$$

so daß

$$d\overset{1}{i}^\alpha \overset{2}{i}_\alpha = \left(\overset{2}{\Gamma}_{\lambda\mu}^\alpha - \overset{1}{\Gamma}_{\lambda\mu}^\alpha \right) \overset{1}{i}^\lambda \overset{2}{i}_\alpha dx^\mu = \left(\overset{2}{R}_\mu - \overset{1}{R}_\mu \right) A_{\nu\lambda} \overset{1}{i}^\nu \overset{2}{i}^\lambda dx^\mu.$$

Aus (3) lassen sich (zusammen mit dem bekannten Gauss-Bonnetschen Satze) noch andere geometrisch interessante Resultate leicht ablesen. Es wird auch eine Konstruktion vom R_μ , der der Gleichung (2) Genüge leistet, angegeben. *Hlavaty* (Prag).

Kawaguchi, Akitsugu: Theory of connections in the generalized Finsler manifold. (*Math. Inst., Univ., Sapporo.*) Proc. imp. Acad. (Tokyo) 7, 211–214 (1931).

1. Mit $\overset{(i)}{\Gamma}_{\lambda\mu}^\nu, \overset{(i)}{\Gamma}_{\lambda\mu}^\nu$ sollen die Koeffizienten einer linearen Konnexion U bezeichnet werden. Sie hängen von $x, \overset{1}{p} = dx, \overset{2}{p}, \dots, \overset{i}{p}$ ab, wo

$$\overset{(k+1)}{p}^\nu = d\overset{(k)}{p}^\nu + \overset{(k)}{\Gamma}_{\lambda\mu}^\nu dx^\mu \overset{(k)}{p}^\lambda. \quad (k = 1, 2, \dots, i).$$

Die Konnexionen $\overset{(1)}{U}, \dots, \overset{(r)}{U}$ sollen zur Konstruktion einer verallgemeinerten Finslerschen Konnexion U mit den Koeffizienten $\overset{(i)}{\Gamma}_{\lambda\mu}^\nu, \overset{(i)}{\Gamma}_{\lambda\mu}^\nu$ dienen.

2. Aus $\delta v^\nu = dv^\nu + \overset{(i)}{\Gamma}_{\lambda\mu}^\nu dx^\mu v^\lambda, \quad \delta w_\lambda = dw_\lambda - \overset{(i)}{\Gamma}_{\lambda\mu}^\nu w_\nu dx^\mu,$

$$dv^\nu = \frac{\partial v^\nu}{\partial x^\mu} dx^\mu + \sum_1^r \overset{(i)}{\frac{\partial v^\nu}{\partial p^\mu}} d\overset{(i)}{p}^\mu, \quad dw_\lambda = \frac{\partial w_\lambda}{\partial x^\mu} dx^\mu + \sum_1^r \overset{(i)}{\frac{\partial w_\lambda}{\partial p^\mu}} d\overset{(i)}{p}^\mu$$

(laut Voraussetzung kommen nur solche Größen in Betracht, welche nur von $x, \overset{(1)}{p}, \dots, \overset{(r)}{p}$ abhängen) folgt

$$\left. \begin{aligned} V_\mu v^\nu &= \frac{\partial v^\nu}{\partial x^\mu} + \overset{(i)}{\Gamma}_{\lambda\mu}^\nu v^\lambda + \sum_1^r \overset{(i)}{\frac{\partial v^\nu}{\partial p^\omega}} \left(\overset{(i)}{V}_\mu \overset{(i)}{p}^\omega - \overset{(i)}{\Gamma}_{\lambda\mu}^{\omega\sigma} \overset{(i)}{p}^\lambda \right), \\ V_\mu w_\lambda &= \frac{\partial w_\lambda}{\partial x^\mu} - \overset{(i)}{\Gamma}_{\lambda\mu}^\nu w_\nu + \sum_1^r \overset{(i)}{\frac{\partial w_\lambda}{\partial p^\omega}} \left(\overset{(i)}{V}_\mu \overset{(i)}{p}^\omega - \overset{(i)}{\Gamma}_{\nu\mu}^{\omega\sigma} \overset{(i)}{p}^\nu \right). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Diese Gleichungen dienen zur Konstruktion von U aus den gegebenen Daten

$$\left. \begin{aligned} Q_{\lambda\mu}^\nu &= (V_\nu g_{\lambda\mu}), & Q_{\lambda\mu}^{\lambda\mu} &= (V_\nu g^{\lambda\mu}), \\ C_{\lambda\mu}^{\nu\sigma} &= (\overset{(i)}{\Gamma}_{\lambda\mu}^\nu - \overset{(i)}{\Gamma}_{\lambda\mu}^{\nu\sigma}), & S_{\lambda\mu}^{\nu\sigma} &= (\overset{(i)}{\Gamma}_{\lambda\mu}^\nu - \overset{(i)}{\Gamma}_{\lambda\mu}^{\nu\sigma}), & S_{\lambda\mu}^{\nu\sigma} &= (\overset{(i)}{\Gamma}_{\lambda\mu}^\nu - \overset{(i)}{\Gamma}_{\lambda\mu}^{\nu\sigma}), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

welche der Autor nach dem Schoutenschen Verfahren (Schouten: Der Ricci-Kalkül, Berlin, Springer 1924, 73) durchführt. Zum Schluß wird auch die Krümmungsgröße von U berechnet.

Bemerkung des Referenten: Hält man an der üblichen Definition von kovarianten Größen fest, so muß $C_{\lambda\mu}^{\nu\sigma} = 0$. Berücksichtigt man aber die „Änderung des kovarianten Maßes“, so treten bei der Behandlung von kovarianten Ableitungen Schwierigkeiten auf, welche näher in „Schouten-Hlavaty: Zur Theorie der allgemeinen linearen Übertragung“ [M. Z. 30, 414 bis 432 (1929)] besprochen wurden.

Hlavaty (Prag).

Topologie:

Menger, Karl: Bericht über metrische Geometrie. Jber. dtsh. Math. Ver.igg. 40, 201—219 (1931).

Eine Menge R , deren Elemente Punkte heißen, nennt Verf. einen halbmetrischen Raum, wenn je 2 Punkten x, y als Abstand eine Zahl $xy \geq 0$ zugeordnet ist, die genau dann verschwindet, wenn $x = y$ ist. Gilt überdies für je 3 Punkte x, y, z die Dreiecksungleichung $xy + yz \geq xz$, so heißt R metrisch. Die halbmetrischen und metrischen Räume bilden den Untersuchungsgegenstand der metrischen Geometrie. Man verdankt dem Verf. vor allem folgende Untersuchungen: 1. Konvexitätstheorie. Ein metrischer Raum R heißt konvex, wenn er zu je 2 Punkten x, z einen von beiden verschiedenen Punkt y mit $xy + yz = xz$ enthält. Der Hauptsatz lautet: Ein konvexer, vollständiger Raum enthält zu je 2 Punkten x, z eine sie enthaltende Teilmenge, welche mit einer Strecke S der Länge xz kongruent (d. h. auf S Abstandstreu abbildbar) ist. 2. Die metrische Kennzeichnung der Teilmengen Euklidischer Räume wird durch folgenden Satz geleistet: Ein halbmetrischer Raum R , von dem je $n + 3$ Punkte kongruent mit $n + 3$ Punkten des Euklidischen R_n sind, ist mit einer Teilmenge des R_n kongruent; enthält R mehr als $n + 3$ Punkte, so genügt es schon, daß je $n + 2$ Punkte von R mit $n + 2$ Punkten des R_n kongruent sind. Und damit k Punkte p_1, \dots, p_k mit k Punkten des R_n kongruent sind, ist die Gültigkeit gewisser Relationen zwischen den Abständen $p_i p_j$ notwendig und hinreichend. 3. Koordinatenlose Differentialgeometrie. Damit ein mindestens 5-punktiger halbmetrischer Raum R linear (d. h. mit einer Teilmenge des R_1 kongruent) sei, ist notwendig und hinreichend, daß für je 3 Punkte x, y, z ein gewisser Ausdruck $\kappa(x, y, z)$ in den Abständen xy, xz, yz verschwindet. Dabei ist der reziproke Wert von $\kappa(x, y, z)$, falls x, y, z in einem Euklidischen Raum liegen, gleich dem Radius des Umkreises; deshalb nennt Verf. $\kappa(x, y, z)$ die Krümmung von x, y, z . Also ist R linear, wenn für je 3 Punkte die Krümmung verschwindet. Definiert man als Krümmung $\kappa(a)$ von R in einem Punkte a den Limes (falls er existiert) der $\kappa(x, y, z)$, wenn x, y, z unabhängig gegen a konvergieren, so ist nicht jede Menge R , nicht einmal jeder Bogen mit identisch verschwindender Krümmung $\kappa(a)$ linear. Wohl aber ist jeder Euklidische Bogen mit identisch verschwindender Krümmung $\kappa(a)$ linear, also eine Strecke. An dieser Aussage, die einen bekannten differentialgeometrischen Satz enthält, ist wesentlich, daß der Beweis keinerlei Differenzierbarkeitsvoraussetzungen benutzt und sich, wie die Krümmungsdefinition, lediglich auf die Abstandsdefinition im Euklidischen Raume stützt. Verf. bezeichnet es allgemein als eine wichtige Aufgabe, die Sätze der Differentialgeometrie nach Möglichkeit auf rein metrischer Grundlage zu formulieren und zu beweisen. — Statt reeller Zahlen kann man auch die Elemente einer beliebigen Abelschen Gruppe G zur Metrisation einer Menge M benutzen, indem man je 2 Elementen aus M ein Elementenpaar $(a, -a)$ von G als Abstand zuordnet; M heißt dann G -metrisch. G selbst metrisiert man, indem man den Elementen a, b den Abstand $(a - b, b - a)$ zuordnet. In der so metrisierten Gruppe kann man eine Art metrischer Geometrie treiben. Die Kennzeichnung der linearen Räume ordnet sich der Frage nach der Charakterisierung jener G -metrischen Mengen M ein, die auf eine Teilmenge von G abstandstreu abbildbar sind. Es sind dies diejenigen Mengen, von denen je 4 Punkte auf 4 Elemente von G abstandstreu abbildbar sind.

Nöbeling (Wien).

Bochner, S.: Kurven endlicher Länge. Jber. dtsh. Math. Ver.igg. 40, 245—249 (1931).

Es sei K ein stetiges Streckenbild im Euklidischen E_n . Für jede Abbildung der Einheitsstrecke auf K berechnen wir die Durchlaufungslänge, d. h. die obere Grenze der Längen aller eingeschriebenen Streckenzüge (die Eckpunkte in „natürlicher“ Reihenfolge). Die untere Grenze J aller Durchlaufungslängen heißt die Jordansche Länge von K . Die Caratheodorysche Länge (oder das Caratheodorysche lineare Maß) C einer Punktmenge K ist bekanntlich folgendermaßen definiert. Bei festem $\varrho > 0$ überdecke man K mit endlich oder abzählbar unendlich vielen konvexen Punkt-

mengen U_k ; ihre Durchmesser seien d_k . Ist nun $C(\varrho)$ die untere Grenze aller $\sum_k d_k$, so ist $C = \lim_{\varrho \rightarrow 0} C(\varrho)$. Schon Caratheodory bewies, daß, wenn für ein Streckenbild J endlich ist, auch C endlich ist und $C \leq J$ gilt. Verf. beweist nun die Umkehrung: Eine abgeschlossene, zusammenhängende Menge K des E_n mit endlichem C ist ein Streckenbild und es gilt $J \leq 2C$. Nöbeling (Wien).

Seifert, Herbert: Konstruktion dreidimensionaler geschlossener Räume. Ber. Verh. sächs. Akad. Lpz., Math.-phys. Kl. 83, 26—66 (1931).

In 2 Dimensionen läßt sich jede geschlossene Fläche als Diskontinuitätsbereich einer diskreten Gruppe von Bewegungen einer der 3 metrischen Ebenen (Kugel, euklidische und hyperbolische Ebene) gewinnen. Man weiß nicht, ob der entsprechende Satz in 3 Dimensionen gilt. Die Aufgabe, die Diskontinuitätsbereiche dreidimensionaler metrischer Bewegungsgruppen topologisch zu untersuchen, ist in der Arbeit von W. Threlfall und H. Seifert (Math. Ann. 104) in Angriff genommen. Verf. ordnet dreidimensionale geschlossene Räume, die durch gewisse Konstruktionsprinzipie (§ 1) gewonnen werden, dem System der Diskontinuitätsbereiche ein. Vollständig werden dabei alle Räume behandelt, die durch Schließung eines Vollringes (§ 4) mittels involutorischer Selbstabbildung seiner Randringfläche entstehen oder auch durch Aufeinanderkleben zweier Ringflächen. Diejenigen von diesen Räumen, deren Fundamentalgruppe endlich ist, sind orientierbar und werden mit Diskontinuitätsbereichen der Hypersphäre identifiziert, welche in der angeführten Arbeit gruppentheoretisch systematisch charakterisiert sind. Ist die Selbstabbildung der berandenden Ringfläche fixpunkthaltig, so ergeben sich Räume, die nach der Gestalt ihres normalen Diskontinuitätsbereiches l. c. Linsenräume genannt sind; ist sie fixpunktlos, so erscheinen überdies die Prismaräume. Die 4 einzigen Räume mit unendlicher Fundamentalgruppe (§ 10) ergeben sich als Diskontinuitätsbereiche des euklidischen Raumes. Zwei von ihnen sind orientierbar, zwei nichtorientierbar. Der eine orientierbare Raum ist das topologische Produkt aus Kreis und Kugel, der andere die Summe zweier projektiven Räume. Der eine nichtorientierbare Raum entsteht durch Identifizieren von Diametralpunkten in Meridiankreisen der den Vollring berandenden Ringfläche und ist das Produkt von Kreis und projektiver Ebene. Der andere entsteht ebenso durch Identifizieren von Diametralpunkten in Breitenkreisen und läßt sich als das Analogon der nichtorientierbaren Ringfläche in 3 Dimensionen ansprechen; zugleich ist er der Raum, der bei naheliegender Festsetzung der Umgebungen von den orientierten Kreisen einer Kugel als Raumelementen gebildet wird. — Zur Erzielung der Ergebnisse wird die Bestimmung der kombinatorisch definierten Fundamentalgruppe (§ 2) eines zusammengesetzten Komplexes aus denen der Teilkomplexe (§ 3) benutzt. — In die Arbeit sind Beispiele und Illustrationen zu topologischen Sätzen und Begriffen eingestreut, die im einzelnen nicht aufgeführt werden können. G. Wiarda (Dresden).

Baer, Reinhold, und Friedrich Levi: Stetige Funktionen in topologischen Räumen. Math. Z. 34, 110—130 (1931).

Es werden bekannte Begriffe wie Diskontinuitätsbereich, Blätterzahl usw. für stetige Funktionen $\alpha(\mathfrak{X})$ (= stetige Abbildungen) eines topologischen Raumes \mathfrak{X} definiert und untersucht. Ein Diskontinuitätsbereich ist eine offene Teilmenge D von \mathfrak{X} , auf welcher α topologisch ist und für welche $\overline{\alpha(D)} = \alpha(\mathfrak{X})$ ist. Die Blätterzahl ist die obere Grenze der Mächtigkeiten der α -Kongruenzklassen (2 Punkte mit gleichem Bildpunkt heißen kongruent). Von besonderem Interesse ist die Verknüpfung der durch α gegebenen Kongruenzrelation mit der Äquivalenzrelation einer Gruppe T topologischer Abbildungen von \mathfrak{X} auf sich. α heißt zulässig bzw. automorph, wenn die Kongruenzklassen bei T wieder in Kongruenzklassen übergehen, bzw. invariant sind. T heißt diskontinuierlich, wenn die α -Kongruenzklassen mit den T -Äquivalenzklassen identisch sind und jeder Punkt von \mathfrak{X} in einem α -Diskontinuitätsbereich liegt. Ist \mathfrak{X} kompakt und im kleinen zusammenhängend, T diskontinuierlich, so ist T endlich. Nöbeling (Wien).

Whitney, Hassler: A theorem on graphs. Ann. of Math., II. s. 32, 378—390 (1931).

Als Hauptresultat beweist der Verf.: Besitzen alle geschlossenen Polygonzüge einer Triangulation der Kugel, die kein Elementardreieck begrenzen, mindestens 4 Kanten, dann gibt es wenigstens einen geschlossenen Polygonzug, der durch jede Ecke geht. Unter einem geschlossenen Zug wird eine Folge verschiedener Ecken, die mittels untereinander verschiedener Kanten zyklisch verbunden sind, verstanden. Das duale Resultat gibt eine hinreichende Bedingung dafür, daß man Gegenden auf einer Kugel auf einer Reise jede genau einmal besuchen kann. Auch der Fall, wo die Gegenden die ganze Kugeloberfläche nicht überdecken, wird betrachtet. Im Zusammenhange mit dem Vierfarbenproblem wird erwähnt, daß es bereits genügt, dieses für Gegenden, die jenen Bedingungen genügen, zu lösen.

F. Bohnenblust (Princeton).

Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper.

Bouligand, G.: Les courants de pensée cantorienne et l'hydrodynamique ou le problème de la naissance des cavitations dans un liquide. Sonderdruck aus: Rev. gén. Sci. 1931. 8 S.

Verf. weist darauf hin, daß die mengentheoretischen Begriffsbildungen und insbesondere die auf ihnen beruhenden neueren Untersuchungen über das Dirichletsche Prinzip und ähnliche Fragestellungen unter Umständen von Bedeutung für die Hydrodynamik sein können. Man wird z. B. auf sie geführt, wenn man fragt, ob und wie in einem stationären Strömungsfeld Quellen entstehen können, welche Frage für die Erklärung des bekannten Phänomens der „Luftlöcher“ wichtig ist. Es folgen einige Bemerkungen über die Angreifbarkeit und die Schwierigkeiten des Problems, ohne daß dieses gelöst wird. (Vgl. dies. Zbl. 1, 85.)

Feller (Kiel).

Reichardt, H.: Über Abweichungen von der Helmholtzschen Theorie elektrokinetischer Erscheinungen. (Kaiser Wilhelm-Inst. f. Strömungsforsch., Göttingen.) Z. physik. Chem. A 154, 337—357 (1931).

Der Verf. verallgemeinert die Helmholtz-Freundlichsche Theorie, indem er innerhalb der Doppelschicht (Dicke d) die Ladungsdichte q , die Zähigkeit μ' und zunächst auch die Dielektrizitätskonstante D' von der Wandentfernung abhängig setzt und so die Lambsche Theorie, nach der der Unterschied zwischen dem elektrokinetisch wirkenden Potential ζ und der elektrostatischen Potentialdifferenz der Doppelschicht $\varphi_1 - \varphi_2$ auf den in der Doppelschicht herrschenden besonderen Reibungsverhältnissen beruht, in die Helmholtzsche einbezieht. Dies scheint ihm deshalb notwendig, weil er die Ergebnisse von Ettisch und Zwanzig [Z. phys. Chem. A 147, 151 (1930)] wegen der Stetigkeit der gefundenen Beziehung zwischen dem Flüssigkeitsdruck und dem Strömungspotential nicht wie diese durch ein Abreißen der Grenzschichten, also einen unstetigen Vorgang, erklären zu können glaubt, sondern durch eine Abhängigkeit der Zähigkeit von der herrschenden Schubspannung. Er berechnet das Strömungspotential E einer durch ein Rohr (Länge l) mit ringförmigem Querschnitt (r_1, r_2) unter dem Druck p fließenden Flüssigkeit (spezifisches Leitvermögen s , Dielektrizitätskonstante D , Zähigkeit μ) unter Berücksichtigung der elektroosmotischen Rückwirkung von E (c mittlere Wanderungsgeschwindigkeit der Ionen):

$$E = \frac{sl}{2\pi(r_1 - r_2)} \int_0^d \frac{d}{dy} \left[D' \left(u - c \frac{E}{l} \right) \right] d\varphi.$$

Dann stellt er die Bewegungsgleichung der Flüssigkeit in der Doppelschicht aus der Gleichgewichtsbedingung für die Schubspannungen auf:

$$\frac{du}{dy} = \frac{r_1 - r_2}{2\mu'l} p - \frac{E}{4\mu'l} \int_0^d D' d \left(\frac{d\varphi}{dy} \right).$$

Um u eliminieren zu können, setzt er $D' = D = \text{const.}$ Berücksichtigt man noch, daß $c \ll D\zeta 10^{-4}/36\pi\mu$, was höchstens nicht zutrifft, wenn ein H-Ion in der Doppel-

schicht seine ganze Flüssigkeitshülle abgäbe, so erhält man: $E(1 + k) = C\kappa p$, worin

$$k = \frac{sD^2}{8\pi^2\mu(r_1 - r_2)} \int_0^d \frac{\mu}{\mu'} \frac{d\varphi}{dy} d\varphi, \quad C = \frac{sD\zeta}{4\pi\mu}, \quad \zeta = \int_0^d \frac{\mu}{\mu'} d\varphi \cdot K \dots$$

berücksichtigt den Einfluß der Anlaufänge. Aus der Formel folgt, daß im Gegensatz zur alten Helmholtzschen Theorie in 2 Röhren mit verschiedenem r_2 die Strömungspotentiale verschieden sind. Messungen an 2 derartigen Röhren ergeben Übereinstimmung mit der Theorie. Bei der einen ergibt sich $d = 1,22 \cdot 10^{-7}$ cm, bei der anderen $1,19 \cdot 10^{-7}$ cm. Dann wird die Bewegungsgleichung für die Elektroosmose unter Wirkung der E.M.K. E wieder aus der Gleichgewichtsbedingung für die Schubkräfte aufgestellt:

$$u = \frac{p}{2\mu l} \int_0^y \frac{\mu}{\mu'} (r - y) dy - \frac{ED}{4\pi\mu l} \int_0^y \frac{\mu}{\mu'} d\varphi.$$

Daraus ersieht man, daß, wenn die Doppelschicht gegen den übrigen Querschnitt vernachlässigt werden kann, die gewöhnlichen Formeln für den sekundlichen Ausfluß bzw. für die Druckerhöhung folgen. Im anderen Falle multiplizieren sich die gewöhnlichen Ausdrücke mit einem von d abhängigen Faktor, der kleiner als 1 ist.

Friedrich Zerner (Wien).

Germani, D.: Sur la structure des formules et la synthèse des lois de similitude en mécanique. (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 2, 419—441 (1931).

Verf. gibt eine Ableitung der Begriffe der Ähnlichkeitsmechanik. Er behandelt insbesondere die Frage nach der Mindestzahl der physikalischen Parameter, die zur Beschreibung eines Vorganges erforderlich sind und dem Einfluß zusätzlicher Parameter auf die Ähnlichkeit. Die Anwendung von Dimensionsbetrachtungen zur Ableitung von Näherungsformeln für den aerodynamischen Widerstand wird klargelegt.

Eisenschütz (Berlin).

Tietjens, O. G.: Flow of gases at a rate exceeding the acoustic velocity. (Res. Dep., Westinghouse Electr. & Mfg. Co., East Pittsburgh, Pa.) Trans. amer. Soc. mechan. Eng. 53, 49—58 (1931).

The usual simplified theory of the flow of a gas through a nozzle is clearly presented and illustrated graphically. The analysis for a straight compression shock includes a simple proof of the relation $w' w'' = c^2$, connecting the velocity w' just before the shock with the velocity w'' just after the shock, c being the velocity of sound at the temperature of the gas in the reservoir. This relation and the principles of thermodynamics indicate that $w' > c$, $w'' < c$. A discussion of the paper by J. M. Spitzglass, H. S. Bean and J. M. Naiman follows the author's presentation. Bateman (Pasadena).

Lampariello, G.: Sull'impossibilità di propagazioni ondose nei fluidi viscosi. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 13, 688—691 (1931).

The theory of characteristics is used to obtain a simple and direct proof of Duhem's theorem that there can be no true wave propagation in a compressible viscous fluid. It is shown in fact that there cannot be a surface of discontinuity which varies the time. An example is given to show that absence of true wave propagation is not necessarily associated with the existence of a resistance to motion depending upon the rate of change of a co-ordinate fixing the position of the moving system. H. Bateman.

Higuchi, Seiichi: Note on the oscillatory motion of a viscous liquid in an open channel of infinite length. Technol. Rep. Tōhoku Univ. Sendai 9, 665—669 (1931).

Verf. behandelt die durch eine Schwingungsbewegung der Wand erzeugte Oszillation einer zähen Flüssigkeit in einem unendlich langen offenen Kanal von Halbkreisquerschnitt. Das Druckgefälle längs der Kanalachse soll Null sein. Eine Tabelle zeigt, daß die Transversalwelle, die sich radial zum Kreismittelpunkt hin ausbreitet, sehr rasch mit der Entfernung von der Wand abklingt. I. Lotz (Göttingen).

Rosenblatt, Alfred: Sur les mouvements des liquides visqueux symétriques par rapport à un axe. C. r. Acad. Sci. Paris **193**, 139—141 (1931).

Der Verf. beweist den Satz: Für eine inkompressible zähe Flüssigkeit gibt es nur zwei achsensymmetrische drehungsfreie Bewegungen, die in Meridianebenen stattfinden und für welche die auf die Stromlinien wirkenden Drücke normal zu den Stromlinien sind, nämlich (z = Symmetrieachse): 1. Die Strömung parallel zur Symmetrieachse mit dem Potential $\Phi = z$. 2. Die Strömung radial von einem Punkt der Symmetrieachse mit dem Potential $\Phi = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. *Schlichting* (Göttingen).

Rosenblatt, Alfred: Sur certains mouvements plans des liquides visqueux. Bull. Sci. math., II, s. **55**, 175—192 (1931).

The work of Hamel on the radial flow of a viscous fluid is completed by a consideration of (1) the case in which the fluid is bounded by two free stream-lines, (2) the case in which the fluid is bounded by a free stream line and a plane wall. In (1) there may be efflux on both free stream-lines or efflux along one radial stream-line and influx along the other. In (2) there are two subcases. In the first there is an upper bound to the aperture for the case of efflux and a lower bound for the case of influx. In the second subcase there is merely an upper bound to the aperture. These motions depend on an arbitrary constant. In all cases the formulas involve elliptic integrals. The paper closes with a study of the motions in logarithmic spirals that differ only slightly from the radial motions already considered. An existence theorem is given for spiral motion between two solid walls.

H. Bateman (Pasadena).

Sen, Nripendranath: On stability of vortex rings in compressible fluids. Bull. Calcutta math. Soc. **23**, 11—22 (1931).

Der Verf. behandelt die Bewegung eines Wirbelringes in einer kompressiblen Flüssigkeit. Während der Grenzfall eines unendlich dünnen Ringes schon früher gelöst worden ist (Chree, Proc. Edin. Math. Soc. Vol. 6), wird hier der Wirbelring mit endlichem Querschnitt diskutiert. Gegen kleine Störungen wird die Bewegung als stabil gefunden.

H. Schlichting (Göttingen).

Kneschke, A.: Über die Bewegung eines Wirbels um Quellen, Senken, Doppelquellen und feste Wirbel in der Halbebene. Ann. Physik, V. F. **9**, 905—915 (1931).

Ein freier Wirbel mit der Zirkulation $-\Gamma$ befinde sich an der Stelle (a, b) in einer Potentialströmung mit der Stromfunktion $\psi(x, y)$. Seine Bewegungsgleichungen lauten dann $\frac{da}{dt} = \frac{\partial \chi(a, b)}{\partial b}$, $\frac{db}{dt} = -\frac{\partial \chi(a, b)}{\partial a}$, wobei $\chi(a, b)$ die sog. Routhsche Funktion ist. Die Ruhepunkte der Wirbelbahn $\chi(a, b) = \text{const.}$ sind durch die simultanen Nullstellen von $\partial \chi / \partial a$ und $\partial \chi / \partial b$ gegeben. Ist der Ruhepunkt Doppelpunkt, Ecke oder Spitze der Wirbelbahn, so ist in ihm der Wirbel labil. Stabilität ist nur vorhanden, wenn der Ruhepunkt isoliert ist. Verf. betrachtet im Anschluß an Lagally [Math. Z. **10**, 231 (1921)] einen Wirbel in einer Halbebene [$\chi(a, b) = \psi(a, b) - \Gamma/4\pi \lg b$] und untersucht die Fälle $\psi = \varepsilon/2\pi \operatorname{arctg} b/a$ ($\varepsilon \geq 0$, Quelle bzw. Senke), $\psi = \frac{\varepsilon}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{2cb}{a^2 + b^2 - c^2}$ (Quelle und Senke an der Stelle $(c, 0)$ bzw. $(-c, 0)$).

Weinstein (Breslau).

Kneschke, A., und S. Matthes: Wirbelbewegung um einen Kreiszylinder. Ann. Physik, V. F. **9**, 916—920 (1931).

Im Anschluß an die vorangehende Arbeit wird die Routhsche Funktion für diese Bewegung bestimmt:

$$\chi(a, b) = u_0 b \left(1 - \frac{R^2}{a^2 + b^2} \right) - \frac{\Gamma}{4\pi} \lg(a^2 + b^2 - R^2),$$

wobei u_0 die Translationsgeschwindigkeit im Unendlichen und R der Radius des kreisförmigen Hindernisses bedeuten. Die Wirbelbahn besitzt einen Ruhepunkt, in dem der Wirbel labil ist.

Weinstein (Breslau).

Michel, Eugen: Raumakustik. (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. **3**, 31—35 (1931).

Aus den Gesetzen für den Schallrückwurf, die an Hand des vom Verf. entwickelten Verfahrens von Zeitlupenaufnahmen an Wassermodellen studiert werden können, läßt sich der verschiedene Einfluß von geraden und gekrümmten Begrenzungsflächen studieren. Die Absorptionszahlen der im Raum vorhandenen schallabsorbierenden Materialien sind von Einfluß auf die Nachhallzeit, für die auf empirischem Wege optimale Werte gefunden sind. Es läßt sich vorausberechnen, ob die nach der geplanten Ausstattung des Raumes sich ergebende Gesamtaborption einwandfrei ist, also die Ausstattung selbst als einwandfrei angesehen werden kann, oder ob die Gesamtdämpfung vermehrt oder vermindert werden muß. *Schultes.*

Rosenhead, L.: The lift on a flat plate between parallel walls. Proc. roy. Soc. Lond. A **132**, 127—152 (1931).

Verf. behandelt das schon früher von Sasaki in Angriff genommene Problem des Einflusses paralleler Wände auf den Auftrieb des Tragflügels von unendlicher Spannweite. Sasaki hatte das Profil mit kleinem Anstellwinkel durch eine schräg gestellte Platte ersetzt und den Einfluß der Wände auf den Auftrieb dieser Platte mit Hilfe der konformen Abbildung im Anschluß an eine Arbeit von Villat berechnet. Er fand eine Auftriebsverminderung, im Gegensatz zu einer Näherungsrechnung von Glauert für großen Abstand der Wände vom Flügel. Verf. fand nun, daß die Nichtbeachtung einer Konstanten bei einer Transformation eine Veränderung des Geschwindigkeitsfeldes im Unendlichen hervorgerufen hatte, und daß sich nach Richtigestellung ein der Glauertschen Näherungsrechnung entsprechender Zuwachs des Auftriebs ergibt. Das Sasakische Ergebnis stimmte, wie der Verf. erwähnt, überein mit einer Näherungsrechnung von v. Kármán, die dieser unter Ersetzung des Flügels durch einen Wirbel durchgeführt hatte. Der v. Kármánschen Arbeit und ihrer Fortsetzung von Poggi liegen aber etwas andere Voraussetzungen über die Ausdehnung der Wände zugrunde. Sie können auch nur die durch die Wände erzwungene Geschwindigkeitsänderung, nicht aber den Einfluß der Stromlinienkrümmung auf das Profil berücksichtigen. *I. Lotz (Göttingen).*

Métral, A.: Sur les résistances aérodynamiques en vol uniformément varié et sur l'effet Katzmayer. (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. **1**, 403—410 (1931).

Le présent travail a pour objet de rechercher, à partir des résultats généraux purement théoriques obtenus par M. Painlevé dès 1925, les résistances aérodynamiques et les caractéristiques aérodynamiques des profils théoriques d'ailerons d'avion utilisés dans la technique aéronautique. Après avoir donné des formules applicables pour tout profil et calculé l'aire du profil même transformé par la représentation conforme relative, l'A. expose deux applications des formules déduites au cas du plan mince et à celui du profil en arc de cercle, expliquant ainsi l'influence d'une accélération du vent sur les résistances aérodynamiques (mouvement uniformément varié). La discussion du cas des ailerons pour lesquelles $\gamma = 0$ est suivie par l'explication non seulement qualitative, mais aussi quantitative de l'effet Katzmayer qui, depuis 1922, n'a pas encore été formulée. La méthode employée dans ce mémoire peut être généralisée et sera généralisée par l'A. au cas du vol à voile. *Bossolasco (Turin).*

Minelli, C.: Sull'equilibrio longitudinale del velivolo ad ala deformabile. Aerotecnica **11**, 507—532 (1931).

The longitudinal equilibrium of a monoplane with deformable wings is examined by a method of small variations starting from the corresponding monoplane with rigid wings. In the case when each wing has a single spar the equations of equilibrium consist of four linear equations for the increments $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, $\Delta\theta$, ΔT of the angle of attack, elevator setting, warp and thrust respectively. When the determinant of these linear equations vanishes the dynamic pressure has a critical value, which depends on aerodynamic, geometric and elastic quantities characteristic of the wing alone. In a change of scale and material in which λ is the scale ratio and η the ratio of the moduli of elasticity of the two substances at corresponding points, the critical dynamic pressure increases linearly with λ but is unaltered by a change in η . With given slope of path,

weight and velocity, ΔT varies in proportion with λ^2 , $\Delta \alpha$ and $\Delta \theta$ remain constant and $\Delta \beta$ also remains constant if there is no change in the factor ν which measures the influence of the slipstream on the tail. $\Delta \alpha$, $\Delta \beta$, $\Delta \theta$ and ΔT depend on the weight and velocity, on the plan of the wing and the torsional stiffness of its spar, on the moment coefficients relative to the elastic axis of the individual sections of the wing when strained from their original forms, on the derivatives with respect to α and θ of the moment coefficients and the total lift coefficient of the wing. $\Delta \beta$ and ΔT depend also upon the derivatives of the drag coefficient of the airplane. $\Delta \beta$ depends further upon the position and size of the elevator as well as on the derivatives of its normal force with respect to α , θ , β and on the derivatives with respect to α and θ of the coefficient of the moment about the center of gravity, and furthermore on the distance of the center of gravity from the line of thrust. Expressions and values of the derivatives of coefficients are given in the appendix. The case of more than one wing spar is also considered and a discussion is given of the longitudinal stability of an airplane with deformable wings.

H. Bateman (Pasadena).

Poggi, L.: Azioni aerodinamiche parallele al movimento su di un'ala piana animata da moto traslatorio uniforme e da moto oscillatorio. *Aerotecnica* 11, 767—779 (1931).

Verf. berechnet die zeitlichen Mittelwerte der von Glauert angegebenen Luftkräfte am ebenen, ungewölbten Schlagflügel und ihrer Arbeiten, aus denen er den Wirkungsgrad des Schlagflügelvortriebs gewinnt.

H. B. Helmbold (Göttingen).

Glauert, H.: Aircerevs for high speed aeroplanes. (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 1, 423—430 (1931).

Glauert zeigt in seinem Vortrag, daß die Konstruktion von Propellern für Flugzeuge mit Fluggeschwindigkeiten, die die halbe Schallgeschwindigkeit erreichen oder überschreiten, auf ganz bestimmte Propellertypen gedrängt wird, die von den Propellern der Flugzeuge mit den heute üblichen Fluggeschwindigkeiten stark abweichen. Der Grund hierfür ist, daß nach den heutigen Erfahrungen die größte Relativgeschwindigkeit zwischen Propeller und Luft die Schallgeschwindigkeit der Luft nicht überschreiten soll. Wirkungsgradverschlechterung oder sehr dünne Flügelenden und Lärm der Propeller würden die Folgen sein. Sieht man daher diese Grenze der Spitzengeschwindigkeit als bindend an, so erhalten die Propeller bei steigender Fluggeschwindigkeit notwendig größere Fortschrittsgrade (Verhältnis von Fluggeschwindigkeit zur größten Umfangsgeschwindigkeit). Die bei den normalen Flugzeugen üblichen geringen Fortschrittsgrade haben den Vorteil, daß der Propeller beim Start, also beim Fortschrittsgrad Null, bei Anstellwinkeln arbeitet, die noch in der Nähe der Anstellwinkel beim normalen Flugzustand liegen. Die Strömung um die Propellerflügel kann daher noch anliegen und einen großen Schub erzeugen. Sobald man aber Fortschrittsgrade über 0,4 anwenden muß, wird der Schub im Stand bei nahezu völlig abgerissener Strömung erzeugt. G. zeigt, daß bei Annahme einer völlig abgerissenen Strömung am Propeller die von jedem Blattelement erzeugten Kräfte senkrecht zur Blattsehne stehen und damit nahezu die Richtung behalten, die beim normalen Flugzustand auftreten soll. Hieraus folgt aber, daß alle Propeller, die im normalen Flugzustand gleichwertig sind, auch im Stand den gleichen Schub liefern. Eine Rücksichtnahme auf den Schub im Stand wird damit völlig unmöglich. Die Konstruktion darf sich demnach allein von dem günstigsten Wirkungsgrad im normalen Fluge leiten lassen, und zwar wird der induzierte Widerstand maßgebend. Der induzierte Widerstand nimmt nämlich nur dann mit Zunahme des Propellerdurchmessers ab, wenn die Verteilung der Energie im Strahl die gleiche bleibt. Bei großen Fortschrittsgraden schlägt nun aber der einzelne Flügel in so großem Abstand durch dieselbe Parallele zur Strahlachse, daß die Energieverteilung günstiger wird, wenn man zu mehrflügeligen Propellern übergeht. Unter der Annahme, daß die Sicherheit gegen Schwingungen ein bestimmtes Verhältnis von Profillehne zur Flügelänge erfordert, nimmt die Flügelzahl ab, wenn der Propellerdurchmesser wächst. G. zeigt nun, daß bei gewissen Fortschrittsgraden der vierflügelige Propeller dem zweiflügeligen wegen seiner gleichmäßigeren Energieverteilung auf den Propellerstrahl überlegen wird trotz der Verkleinerung des Propellerdurchmessers. Auch unter gleichzeitiger Berücksichtigung des Profilwiderstandes wird bei Steigerung der Fluggeschwindigkeit der zweiflügelige Propeller dem vierflügeligen und dieser wieder dem sechsflügeligen Platz machen müssen. Bei dem Zahlenbeispiel ergab der günstigste Propeller dabei stets etwa 2 m Durchmesser (Fluggeschwindigkeiten 150 und 200 m/s).

Busemann (Dresden).

Hogner, Einar: Zur Theorie des Schraubenpropellers. (*Stockholm, Sitzg. v. 24. bis 29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 1, 431—436 (1931).

Anwendung einer von Hogner in den *Annalen der Physik* 1928 angegebenen Be-

rechnungsmethode für Schrauben mit endlicher Flügelzahl auf das Problem der Schraube in der ungleichförmigen Zuströmung hinter einem Schiff (Rotationskörper). Die Wechselwirkung zwischen Schiffskörper und Schraube wird durch einen Ansatz von Thoma berücksichtigt. Die Untersuchung beschränkt sich auf schwach belastete Schrauben, für die angegeben wird, wie das Minimumproblem der Energieverluste durch Anwendung des Ritzschen Verfahrens gelöst werden kann. Durchgeführt scheint eine derartige Rechnung bisher nicht zu sein; für die Zwecke der Ingenieurpraxis ist sie jedenfalls auch zu schwerfällig. Als irreführend ist zu beanstanden, daß die vom Reibungsnachstrom hinterm Schiff herrührende Leistungersparnis irgendeinem ungenannten formalen Gesichtspunkt zuliebe als Effektverlust bezeichnet wird; der Nachweis des negativen Vorzeichens dieses Verlustes wird dem Leser überlassen. Das Gleiche gilt für das Vorzeichen der tangentialen Störungsgeschwindigkeit, das sich nach H.s Festsetzung als wesentlich negativ herausstellt. *H. B. Helmbold (Göttingen).*

Helmbold, H. B.: Über die Goldsteinsche Lösung des Problems der Luftschraube mit endlicher Flügelzahl. (*Aerodyn. Versuchsanst. d. Kaiser Wilhelm-Ges., Univ. Göttingen.*) Z. Flugtechn. **22**, 429—432 (1931).

Verf. kennzeichnet nach einem kurzen Überblick über die bisherigen Ansätze zur Lösung des Problems der Luftschraube mit endlicher Flügelzahl den durch die Goldsteinsche Arbeit erreichten Fortschritt. Goldstein hat den wichtigen Sonderfall der reibungslosen, schwach belasteten Schraube endlicher Flügelzahl mit geringstem Energieverlust in strenger Form gelöst und dadurch eine genaue Berechnung des Mittelwertfaktors x ermöglicht, der das Verhältnis der Zirkulation bei endlicher zu dem bei unendlicher Flügelzahl bei gleichem Fortschrittsgrad gibt. Der Verf. stellt die Ergebnisse der Goldsteinschen Lösung dar in Form von Diagrammen, die dem Praktiker erst die Benutzung der Goldsteinschen Theorie bequem möglich machen. *I. Lotz.*

Pistolesi, E.: Sull'origine della portanza. (*La Haye, Sitzg. v. 1.—6. IX. 1930.*) Verh. 5. internat. Kongr. Luftf. **1**, 488—496 (1931).

Cagniard, Louis: Les variations du pouvoir inducteur spécifique des fluides. *Mémoires Sci. phys.* **H. 18**, 1—62 (1931).

Weinblum, Georg: Schiffe geringsten Widerstands. (*Stockholm, Sitzg. v. 24. bis 29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. **1**, 449—458 (1931).

Für scharfe Schiffsförmungen scheint Michells Wellenwiderstandsintegral (*Philosophic. Mag.* 1898) berufen zu sein, eine wertvolle Arbeitshypothese für Schleppversuche darzustellen. Wendet man das Integral auf die vom Verf. vorgeschlagenen analytischen Schiffsförmungen (Werft, Reederei, Hafen 1929) an und löst nach dem Ritzschen Verfahren das hierbei auftretende Variationsproblem, so erhält man in erster Näherung Schiffe, deren Wellenwiderstand ein Minimum ist. Beispiele und Ergebnisse werden gebracht. *Autoreferat.*

Barrillon, E. G.: Les coordonnées du centre de carène exactes jusqu'aux termes en Θ^2 . (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. **2**, 404—410 (1931).

Eine gegebene geschlossene Raumfläche W soll von einer beweglichen Ebene P so geschnitten werden, daß das durch P und W eingeschlossene Volumen V konstant ist (condition isocarène). Bisher waren die Koordinaten des Schwerpunktes C von V nur in erster Annäherung als lineare Funktion der Neigung Θ der Ebene P zu ihrer Anfangslage P_0 und aus den Trägheitsmomenten der durch W aus P_0 ausgeschnittenen ebenen Figur bekannt. Durch die Arbeit Barrillons kommen nun als zweite Annäherung noch Ausdrücke mit Θ^2 hinzu unter Verwendung der jeweiligen Neigung der Fläche W zu P_0 in den Punkten ihrer Schnittkurve. Diese Koordinaten von C spielen in der Stabilitätstheorie der Schiffe eine wichtige Rolle. Durch die neuen Formeln können unter gewissen Bedingungen die Krümmungsradien der C -Verlagerung bestimmt werden. Gleichzeitig ergibt die Berechnungsmethode den Berührungspunkt F der Ebene P mit ihrer Hüllfläche. Aus den gegenseitigen Beziehungen dieser Punkte

lassen sich die Koordinaten von F bis auf Ausdrücke in Θ^2 , die von C bis auf Ausdrücke in Θ^3 genau entwickeln. von den Steinen (Bergedorf).

Brard, Roger: Le problème isocarène inverse; les arbitraires dont dépend la stabilité de forme des navires. (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 2, 411—417 (1931).

Wenn die bewegliche Schwimmebene vom festgehaltenen Schwimmkörper das konstante Volumen V abschneidet, beschreibt gleichzeitig der Schwerpunkt C von V die Raumfläche $[C]$ und hüllt die Schwimmebene die Raumfläche $[F]$ mit F als Berührungspunkt ein. Die Arbeit Brards befaßt sich mit den Bedingungen, unter denen rückwärts aus 2 gegebenen Flächen als Flächen $[C]$ und $[F]$ die Schwimmkörperform wiedergefunden werden kann, und den Möglichkeiten, welche sich daraus für die Stabilitätsrechnung ergeben. von den Steinen (Bergedorf).

Quantentheorie.

Mukherjee, K. K.: Korrespondenz zwischen Wellen- und klassischer Mechanik. (Phys. Labor., Univ. Calcutta.) Physik. Z. 32, 485—487 (1931).

Ableitung und Erörterung einiger bekannter Formeln der Wellenmechanik.

P. Jordan (Rostock).

Darwin, Charles Galton: The uncertainty principle. Science (N. Y.) 1931 I, 653 bis 660.

Allgemeinverständliche Darlegung der „Ungenauigkeitsregel“ für gleichzeitige Beobachtung von Ort und Impuls eines Elektrons.

P. Jordan (Rostock).

Compton, Arthur H.: The uncertainty principle and free will. Science (N. Y.) 1931 II, 172.

Ott, H.: Kausalgesetz und gegenwärtige Physik. Verh. physik.-med. Ges. Würzburg, N. F. 56, 27—46 (1931).

Suzuki, Seitarô: Verschiedene Statistiken und ihre Formeln. (Dep. of Agricult., Univ., Fukuoka.) Z. Physik 70, 140—144 (1931).

Verf. betrachtet eine Verallgemeinerung des Pauliverbots, indem er annimmt, daß in jeder Zelle des Phasenvolumens höchstens m Teilchen liegen können. Für die mittlere Energie findet er dann $\bar{E} = \varepsilon \vartheta / 1 - \vartheta - (m + 1) \varepsilon \vartheta^{m+1} / 1 - \vartheta^{m+1}$, wo $\vartheta = e^{-\varepsilon/kT}$. Andererseits leitet er aus einem speziellen Wahrscheinlichkeitsansatz ab $\bar{E} = \varepsilon / e^{\varepsilon/kT} + a$. Beide Formeln geben sowohl die Fermi-Dirac-Statistik als diejenige von Bose-Einstein, erstere für $m = 1$ und $a = +1$, letztere für $m = \infty$ und $a = -1$.

F. Zernike (Groningen).

Venbacher, Antonietta: Sui metodi statistici della fisica moderna. Atti Soc. ligust. Sci., N. s. 10, 127—139 (1931).

Ganz elementare Darstellung, ohne Beweise, der verschiedenen sog. „Statistiken“ in ihrer Anwendung auf quantenmechanische materielle Systeme und auf das Licht.

L. Rosenfeld (Lüttich).

Rosenfeld, L.: Zur Kritik der Diracschen Strahlungstheorie. (Inst. f. Teoret. Fys., Univ., København.) Z. Physik 70, 454—462 (1931).

Die Anwendung der quantenmechanischen Methoden auf das elektromagnetische Strahlungsfeld und seine Wechselwirkung mit schwingenden Elektronen hat neben verschiedenen positiven Erfolgen andererseits auch zu gewissen, schon viel diskutierten Schwierigkeiten geführt. Die vorliegende Arbeit bringt einen Fortschritt in der Erkenntnis dieser Schwierigkeiten durch ausführliche Diskussion eines explizit integrierbaren Beispiels (harmonischer Oszillator). Allgemein zeigt sich, daß dasselbe Störungsverfahren zur Bestimmung der Wechselwirkung des Strahlungsfeldes mit einem Atom, welches die durch die Strahlung am Atom hervorgerufenen Übergangswahrscheinlichkeiten (sowie auch Linienbreiten) in richtiger Weise liefert, zu sinnlosen Ergeb-

nissen führt bezüglich der Werte der Wechselwirkungsenergie (die sich als unendlich groß ergeben).
P. Jordan (Rostock).

Heisenberg, W.: Über Energieschwankungen in einem Strahlungsfeld. Ber. Verh. sächs. Akad. Lpz., Math.-phys. Kl. 83, 3—9 (1931).

In einem kleinen Teilvolum V eines großen von elektromagnetischer Strahlung erfüllten Hohlraums schwankt die zum Frequenzintervall $\nu, \nu + d\nu$ gehörige Energie E nach Einstein derart, daß für den Quadratmittelwert der Schwankungen

$$\overline{(\Delta E)^2} = h\nu \cdot \bar{E} + \frac{\bar{E}^2 c^3}{8\pi\nu^2 d\nu \cdot V} \quad (1)$$

gilt. Das ist rein thermodynamisch aus dem Planckschen Gesetz ableitbar. Eine direkte Ausrechnung des Schwankungsquadrats ergibt jedoch unter Zugrundelegung der klassischen Wellentheorie die Formel

$$\overline{(\Delta E)^2} = \frac{\bar{E}^2 c^3}{8\pi\nu^2 d\nu \cdot V} \quad (2)$$

(Lorentz), in der also das erste Glied von (1) fehlt. Dieses Versagen der klassischen Wellentheorie war nach Einstein eines der wesentlichsten Argumente für die Einführung der Lichtquantenvorstellung. Die Quantenmechanik brachte den Fortschritt, daß ohne explizite Heranziehung der Lichtquantenvorstellung, allein durch Anwendung der quantenmechanischen Methode auf die Wellenvorstellung, die thermodynamisch richtige Formel (1) abgeleitet werden konnte (Born-Heisenberg-Jordan), womit sich die Fähigkeit der Quantenmechanik zur Überbrückung des Gegensatzes „Wellenstrahlung — Korpuskularstrahlung“ zeigte. Die vorliegende Arbeit zeigt aber, daß bei dieser Untersuchung noch eine gewisse Feinheit übersehen war, die jetzt zugleich aufgefunden und klargestellt wird. In der klassischen Theorie ergeben sich die Interferenzschwankungen der Strahlung im Teilvolum V als „Schwebungen“ zwischen je einer Eigenschwingung und den ihr unendlich nah benachbarten Eigenfrequenzen; die Interferenz zwischen endlich verschiedenen Frequenzen liefert dagegen (trivialer Weise) keinen von Null verschiedenen Beitrag. Im Gegensatz dazu liefert die Quantenmechanik zunächst formal (dieser Punkt war nicht beachtet worden in der Untersuchung von Born-Heisenberg-Jordan) auch für endlich verschiedene Frequenzen eine von Null verschiedene Interferenzschwankung und damit sogar einen unendlich großen Wert für das Schwankungsquadrat $\overline{(\Delta E)^2}$. Das hängt damit zusammen, daß in der Quantenmechanik die Schwingungsvorgänge nicht den Zuständen, sondern den Übergängen (Zustandspaaren) zugeordnet sind, so daß auch dann, wenn im Hohlraum eine von Null verschiedene Strahlungsenergie mit Frequenzen außerhalb des Intervalles $\nu, \nu + d\nu$ gar nicht vorhanden ist, trotzdem eine „Interferenz“ mit den Eigenschwingungen außerhalb $\nu, \nu + d\nu$ möglich ist. Der innere Sinn dieser zusätzlichen, unendlich großen Schwankungen ist aber dieser: Zu einer tatsächlichen „Messung“ der in V enthaltenen Strahlungsenergie ist eine tatsächliche Abtrennung dieses Volums V vom großen Gesamtvolum erforderlich, also eine Aufhebung ihrer Wechselwirkung, und diese erfordert einen unendlich starken Eingriff in Rücksicht auf die Möglichkeit des Auftretens von Lichtquanten mit beliebig großer Energie. Die Sachlage ändert sich jedoch, wenn man dem Teilvolum V statt einer mathematisch unendlich scharf bestimmten Grenze eine verwaschene Grenze gibt; dann erfordert die Abtrennung nur noch eine entsprechende (beliebig klein zu machende) Energie des Eingriffs, und für die Schwankungen der Energie im so definierten Teilvolum sind nur noch die Interferenz-Schwebungen maßgebend, bezüglich deren die früheren Feststellungen unverändert bleiben.
P. Jordan (Rostock).

Sauter, Fritz: Über das Verhalten eines Elektrons im homogenen elektrischen Feld nach der relativistischen Theorie Diracs. Z. Physik 69, 742—764 (1931).

Es werden die Lösungen der Diracs-Gleichung im homogenen elektrischen Felde angegeben und diskutiert. Für die Wahrscheinlichkeit eines Überganges in das Gebiet

der „negativen Masse“ ergibt sich, wie zu erwarten war, die Bestätigung der Behauptung von N. Bohr, daß diese nur dann merklich von Null verschieden wird, wenn der Potentialverlauf genügend (schon aus Dimensionsgründen ist dafür eine Kraft $F \sim m^2 c^2 / h$ notwendig) steil wird. Landau (Leningrad).

Farkas, L., und P. Harteck: Thermodynamische Bemerkungen zur Entstehung der Elemente. (Kaiser Wilhelm-Inst. f. Phys. Chem. u. Elektrochem., Berlin-Dahlem.) Naturwiss. 1931 II, 705—706.

Magnus, A.: Eine Formel zur Berechnung atomarer Eigenfrequenzen. (Inst. f. Phys. Chem., Univ. Frankfurt a. M.) Z. physik. Chem. Erg.-Bd, Bodenst.-Festbd, 273—282 (1931).

Mulliken, Robert S., and Andrew Christy: A-type doubling and electron configurations in diatomic molecules. (Ryerson Phys. Labor., Univ. of Chicago, Chicago.) Physic. Rev., II. s. 38, 87—119 (1931).

Die Verf. geben zunächst eine bequeme kurze Zusammenfassung der von Kronig und van Vleck abgeleiteten Formeln für die Λ -Verdoppelung in ${}^1\Pi$ - und ${}^2\Pi$ -Zuständen und die Spinverdoppelung in ${}^2\Sigma$ -Zuständen zweiatomiger Moleküle als Funktion der Rotationsquantenzahlen. Die absoluten Beträge der Aufspaltungen sind dabei nach den genannten Verff. für die Π -Niveaus durch die Lage und die Eigenschaften der Σ -Zustände, für die Σ -Niveaus durch die Lage und die Eigenschaften der Π -Zustände bestimmt. Es wird nun erörtert, in welchen Fällen die experimentellen Daten ausreichen, um die Werte der Aufspaltungen quantitativ vorherzusagen. Dies ist vor allem dann möglich, wenn der Einfluß eines Elektronenzustandes auf die Folge von Niveaus, deren Aufspaltung zu berechnen ist, den Einfluß aller übrigen Elektronenzustände bei weitem überwiegt. Ein wichtiges Beispiel hierfür bildet der Fall, daß in einem Σ - und einem benachbarten Π -Zustand für die Elektronenbewegung noch ein Bahndrehimpuls L angenähert definiert ist, und die beiden Zustände sich nur durch den verschiedenen Wert $\Lambda = 0$ und $\Lambda = 1$ der Komponente dieses Drehimpulses entlang der Kernverbindungsline bei im übrigen gleicher Elektronenfiguration unterscheiden; ferner der Fall, daß der Wert von Λ im wesentlichen der Beitrag λ eines einzelnen (äußeren) Elektrons ist. Man spricht dann von „reiner Präzession“. Es folgt ein sehr ausführlicher Vergleich der theoretischen Ergebnisse mit dem empirischen Material, die beide in Tabellen übersichtlich zusammengestellt sind. Die diskutierten Beobachtungen beziehen sich dabei hauptsächlich auf zweiatomige Hydride, da bei ihnen wegen des kleinen Trägheitsmoments die Aufspaltungen besonders groß sind, und entsprechen den verschiedensten Koppelungsfällen. Es zeigt sich, daß für einen überraschend großen Bruchteil der Fälle eine befriedigende Deutung auf Grund der Voraussetzung der „reinen Präzession“ erzielt werden kann. Für verschiedene Moleküle ermöglicht dieser Befund Aussagen über die Elektronenkonfigurationen. Kronig (Groningen).

Massey, H. S. W.: The triatomic hydrogen ion H_3^+ . Proc. Cambridge philos. Soc. 27, 451—459 (1931).

Verf. behandelt das einfachste quantenmechanische System mit mehr als zwei Kernen und berücksichtigt die infolge der Gleichheit der Kerne eintretende Entartung. Als ungestörtes System stehen zur Wahl: a) Das Molekülion H_3^+ und das H -Atom oder b) das Molekül H_2 und das Proton H^+ . Die Störungsrechnung läuft analog der bekannten Rechnung im Heitler-Londonschen Modell. In der benutzten Näherung läßt es sich nicht mit Sicherheit entscheiden, ob das H_3^+ ein homöopolares Molekülion ist, oder ob seine Existenz der Polarisierung zuzuschreiben ist. G. Rumer (Göttingen).

Kronig, R. de L.: Zur Theorie der Feinstruktur in den Röntgenabsorptionsspektren. (Naturw. Labor., Univ., Groningen.) Z. Physik. 70, 317—323 (1931).

Es wird eine qualitative Erklärung der Feinstruktur in den Röntgenabsorptionsspektren gegeben. Bei den einatomigen Gasen gibt es eine Feinstruktur von höchstens einigen Volt. Diese kann erklärt werden, indem man annimmt, daß das betreffende innere Elektron ionisiert oder aber in einen angeregten Zustand gehoben werden kann.

Der angeregte Zustand liegt ja immer nur wenige Volt unter der Ionisationsgrenze. Bei festen Körpern, insbesondere bei Metallen gibt es eine Feinstruktur, die sich über mehrere 100 Volt erstreckt. Dies wird dadurch erklärt, daß, während in einem Atomspektrum alle Energien oberhalb der Ionisationsenergie erlaubt sind, es in einem periodischen Kraftfeld bei beliebig hoher Energie noch verbotene Zonen gibt (entsprechend den Braggschen Reflexionen), was dann ein Schwanken der Röntgenabsorption mit der Wellenlänge hervorruft. Diese Auffassung wird auch dadurch gestützt, daß sich die Feinstruktur bei steigender Temperatur (infolge der Gitterausdehnung) zusammenzieht. Zugleich wird die Feinstruktur verwuschener, da die Wärmebewegung die strenge Periodizität und mithin den scharfen Unterschied zwischen erlaubten und verbotenen Zonen zerstört. Die mehratomigen Gase nehmen begreiflicherweise eine Mittelstellung zwischen den einatomigen Gasen und den festen Körpern ein. Hier gibt es zwar keine verbotene Zonen, aber die Absorption erleidet im kontinuierlichen Spektrum charakteristische Schwankungen. *E. Teller (Göttingen).*

Placzek, G.: Intensität und Polarisierung der Ramanschen Streustrahlung mehratomiger Moleküle. (*Phys. Inst., Univ. Utrecht.*) *Z. Physik* **70**, 84—103 (1931).

Verf. berechnet Auswahlregeln, Intensitätsverteilung und Polarisierungseigenschaften von Ramanübergängen an Molekülen. Da der Ramaneffekt durch die Wechselwirkung zwischen Kern- und Elektronenbewegung zustande kommt und die Kernschwingungsfrequenzen klein gegen die der Elektronenübergänge sind, können die für Intensität und Polarisierung der Strahlung maßgebenden Größen durch Entwicklung der elektrischen Polarisierbarkeit nach den Kernkoordinaten erhalten werden. Dabei ergibt sich ein interessanter Zusammenhang mit der Natur der chemischen Bindung: bei extrem heteropolaren, aus abgeschlossenen Ionen bestehenden Molekülen — ein Fall der in der Natur in einigen Fällen mit großer Näherung realisiert ist — bei Verbindungen also, bei denen keine Wechselwirkung zwischen den beiden Elektronenschalen stattfindet (Additivität der Refraktionsäquivalente), ist kein Ramaneffekt zu erwarten, während er mit zunehmend homöopolarem Charakter der Bindung (Wechselwirkung der beiden Elektronenschalen und somit Abhängigkeit der Polarisierbarkeit von den Kernkoordinaten) immer stärker hervortritt. Ferner zeigt sich, daß bestimmte Ramanübergänge ganz ausfallen, wenn die Form der zugehörigen Kernschwingung gewissen Symmetriebedingungen genügt. Auf Grund dieser theoretischen Erwägungen diskutiert der Verf. die Deutung einiger gemessener Ramanspektren von Molekülen des Typus AB_4 , AB_2 sowie von Acetylen und Äthylen, wobei in einigen Fällen die bisherige Zuordnung bestätigt, in anderen eine neue Zuordnung vorgeschlagen wird.

Houtermans (Berlin).

Rosen, N.: Calculation of interaction between atoms with s-electrons. (*Massachusetts Inst. of Technol., Cambridge [U.S.A.].*) *Physic. Rev.*, II. s. **38**, 255—276 (1931).

Es wird nach der Heitler-Londonschen Methode die Wechselwirkungsenergie zweier Atome untersucht, deren äußerste Elektronen in s-Bahnen gebunden sind (bei zwei äußeren Elektronen in äquivalenten s-Bahnen), während die übrigen Elektronen abgeschlossene Schalen bilden, und zwar auf Grund der folgenden Annahmen: 1. Die Wellenfunktionen der isolierten Atome können nach dem Verfahren von Slater als Produkte oder als Summen von Produkten geschrieben werden, deren Faktoren jeder nur von den Koordinaten eines einzelnen Elektrons abhängt. 2. Die inneren abgeschlossenen Schalen liefern zur Wechselwirkungsenergie keinen nennenswerten Beitrag. 3. Die Anziehung durch gegenseitige Polarisierung der Atome, die in der Störungsrechnung erst in zweiter Näherung zutage kommt, darf vernachlässigt werden. Als erster Fall wird die Wechselwirkung zweier Atome besprochen, die jedes ein äußeres s-Elektron haben. Beim Zusammenführen entsteht ein $^1\Sigma$ - und ein $^3\Sigma$ -Term des Moleküls, von denen ersterer im allgemeinen einer Anziehung, letzterer einer Abstoßung entspricht. Es folgt der Fall, daß ein Atom ein äußeres s-Elektron, das andere deren zwei in äquivalenten Bahnen hat. Hier kann nur ein $^2\Sigma$ -Zustand entstehen. Endlich wird noch

der Fall untersucht, daß beide Atome je zwei *s*-Elektronen in äquivalenten Bahnen haben mit einem $^1\Sigma$ -Zustand des Moleküls als einzige Möglichkeit. Die in der Wechselwirkungsenergie auftretenden Integrale werden nun näher berechnet und in Tabellen als Funktion der abgeschirmten Kernladung und der Hauptquantenzahl zusammengestellt, die in der Slaterschen Wellenfunktion eines *s*-Elektrons auftreten. Die Ergebnisse werden auf die Wechselwirkung zweier Na-Atome und zweier He-Atome im Grundzustand angewendet. Im ersten Fall ist Molekülbildung möglich. Es ergibt sich für die Dissoziationsarbeit 0,84 Volt, für den Gleichgewichtsabstand der Kerne 3,01 Å., für die Schwingungsfrequenz 170 cm^{-1} (experimentelle Werte: 0,8 Volt, 3,07 Å., 158 cm^{-1}). Im zweiten Falle findet Abstoßung statt. Die Abstoßungskurve wird berechnet.

R. de L. Kronig (Groningen).

Starodubrowsky, P.: Zur Frage nach der Austauschenergie. (*Metallurg. Inst., Dnepropetrowsk.*) *Z. Physik* **70**, 812—816 (1931).

Berechnung der Austauschenergie nach der Heitler-Londonschen Methode für zwei wasserstoffähnliche Atome im Grundzustand als Funktion der Kernladungen Z_1 und Z_2 .

R. de L. Kronig (Groningen).

Heitler, W.: Quantum theory and electron pair bond. *Physic. Rev.*, II. s. **38**, 243—247 (1931).

Der Valenzbegriff läßt sich folgendermaßen in die allgemeine Begriffsbildung der Quantenmechanik einordnen. Es seien *A, B, C* . . . verschiedene Atome und $p_{ab}, p_{ac}, p_{bc}, \dots$ die Anzahl der Valenzstriche zwischen je zwei von ihnen im fertigen Molekül. Es existieren f_s unabhängige Wellenfunktionen Ψ_k , die die verschiedenen Valenzzustände des Moleküls beschreiben, welche sich voneinander durch die Verteilung der Valenzstriche unterscheiden. Die f_s Wellenfunktionen Φ_i , die zu den verschiedenen Energiezuständen des Moleküls gehören, sind aber bestimmte Linearkombinationen der Ψ_k . D. h. in der Sprache der Quantenmechanik, daß die Energie mit der Konfiguration der Valenzstriche nicht vertauschbar ist und man nur nach der Wahrscheinlichkeit fragen darf, das Molekül in einem bestimmten Valenzzustand Ψ_k zu finden, wenn der Energiezustand Φ_i bekannt ist oder umgekehrt. Verf. zeigt an einigen einfachen Beispielen, daß die Wahrscheinlichkeit eines Energiezustandes für alle Valenzzustände außer einem sehr klein ist, d. h. die Energie und Valenz sind beinahe auf Hauptachsen bezogen. Für den energetisch stabilen Molekülzustand ist dieser ausgezeichnete Valenzzustand derjenige, welcher von der Chemie erwartet wird.

G. Rumer (Göttingen).

Nordheim, Lothar: Zur Elektronentheorie der Metalle. I. *Ann. Physik*, V. F. **9**, 607—640 u. 641—678 (1931).

Die vorliegende Arbeit gibt eine übersichtliche Ableitung der bisher in der Elektronentheorie der Metalle gewonnenen Resultate, insbesondere über die elektrische und Wärmeleitfähigkeit, die thermoelektrischen Erscheinungen, den Widerstand von Legierungen und die Matthiessensche Regel. Zunächst werden die allgemeinen quantenmechanischen Eigenschaften eines Elektrons in einem periodischen Kraftfeld besprochen. Hierauf wird gezeigt, wie sich die Gleichungen der Thermoelektrizität (Zusammenhang zwischen elektrischer und Wärmeleitfähigkeit, Thomson- und Peltiereffekt, Thermokraft) allgemein aus den einfachen Symmetrieeigenschaften der Übergangswahrscheinlichkeiten und der Form der Verteilungsfunktion im thermischen Gleichgewicht $f_0 = g(Ae^{-E/kT})$ schließen lassen. In der Diskussion der Übergangswahrscheinlichkeiten werden neben den Gitterschwingungen in konsequenter Weise die Veränderungen der Ionenpotentiale durch Fremdatome und damit der temperaturunabhängige Widerstand der Legierungen mitberücksichtigt und so die früher bereits in Analogie zur Röntgenoptik erhaltene Abhängigkeit des Widerstandes vom Mischungsverhältnis neu hergeleitet. Ferner wird im Grenzfall sehr wenig gebundener Elektronen und unter der Annahme eines abgeschirmten Coulombionenpotentials der Widerstand numerisch genau berechnet, und es wird gezeigt, daß seine

Größenordnung in sehr befriedigender Weise mit dem erfahrungsmäßigen Wert sehr gut leitender Metalle übereinstimmt; die vorliegenden Abweichungen liegen durchaus verständlich im Sinne größeren Widerstandes, wie es durch einen merklichen Einfluß der Bindung der Elektronen an die Ionen zu erwarten ist. *Bloch* (Kopenhagen).

Bitter, Francis: On impurities in metals. (*Westinghouse Res. Labor., East Pittsburgh.*) *Physic. Rev.*, II. s. 37, 1527—1547 (1931).

Unter der Annahme anziehender und abstoßender Kräfte wird die Störung der Gitterstruktur durch eingelagerte Fremdatome untersucht. Es wird gezeigt, daß in großen Abständen, wo ihr Einfluß auf das Gitter durch eine stetige elastische Deformation beschrieben werden kann, zwei Fremdatome keine Wirkung aufeinander ausüben, so daß für hohe Temperaturen ihr statistisches Verhalten das eines idealen Gases ist. Ferner werden die Dichteschwankungen der Verunreinigungen diskutiert und es wird die Vermutung ausgesprochen, daß der Ferromagnetismus von Austenit von kleinen, durch Dichteschwankungen zustande kommenden Körnern von α -Eisen herühren könnte.

Bloch (Kopenhagen).

Frank, N. H., and L. A. Young: Transmission of electrons through potential barriers. (*Massachusetts Inst. of Technol., Cambridge [U.S.A.]*) *Physic. Rev.*, II. s. 38, 80—(1931).

Der Durchgang von Elektronen durch Potentialschwellen wird vermittle der Methode von Wentzel-Kramers-Brillouin zur angenäherten Lösung der Schrödingergleichung behandelt. Das Verfahren ist für beliebige Formen der Schwelle anwendbar und bringt einige Vereinfachungen gegenüber früheren Berechnungen.

Nordheim (Göttingen).

Massey, H. S. W.: The theory of the extraction of electrons from metals by metastable atoms. II. *Proc. Cambridge philos. Soc.* 27, 460—468 (1931).

Es wird das Herausziehen von Elektronen aus Metallen beim Auftreffen von Heliumatomen im metastabilen 2^3S -Zustand wellenmechanisch berechnet. Der Effekt kommt allein durch Austausch zwischen einem (als frei betrachteten) Metall-elektron und dem angeregten Heliumelektron zustande, da das Atom sonst nicht in den Grundzustand übergehen kann. Die Theorie ist in befriedigender Übereinstimmung mit Experimenten von M. L. E. Oliphant, *Proc. Roy. Soc. A*, 124, 228 (1929) und erlaubt auch Aussagen über die Winkelverteilung der austretenden Elektronen, die prüfbar sein sollten.

Nordheim (Göttingen).

Frenkel, J.: On the transformation of light into heat in solids. II. (*Dep. of Phys., Univ. of Minnesota, Minneapolis.*) *Physic. Rev.*, II. s. 37, 1276—1294 (1931).

Nach einer früheren Arbeit des Verf. (vgl. dies. Zbl. 1, 106) ist die Eigenfunktion eines angeregten Kristalls gegeben durch eine Anregungswelle $\psi_1 = e^{i(t-r)} \psi(r)$, wenn $\psi(r)$ die Eigenfunktion für den Fall ist, daß das an der Stelle r liegende Atom angeregt und alle übrigen im Grundzustand sind. Nachdem die Theorie von Elementen auf die Kristalle binärer Verbindungen ausgedehnt ist, wird die Theorie der Lichtabsorption besprochen und gezeigt, daß die Wellenzahl der bei der Absorption angeregten Anregungswelle gleich der des einfallenden Lichtes sein muß (bis auf eine kleine Unschärfe wegen der Absorption des Lichts). Deshalb sollten in erster Näherung Kristalle ein Linienspektrum zeigen. In zweiter Näherung können gleichzeitig mit dem Elektronensprung auch Kristallschwingungen angeregt werden, und zwar bei tiefen Temperaturen bevorzugt hochfrequente. Auf der kurzwelligen Seite jeder Hauptabsorptionslinie ν wird es also ein kontinuierliches Spektrum geben, dessen Intensitätsmaximum an seinem kurzwelligen Ende $\nu + \nu_0$ liegt (ν_0 = maximale Schwingungsfrequenz des Kristallgitters). Die Intensität dieses kontinuierlichen Spektrums nimmt bei steigender Temperatur auf Kosten der Intensität der Hauptlinie zu, gleichzeitig wird ihre spektrale Verteilung immer gleichmäßiger. — Ref. kann sich der Grundannahme, insbesondere des ersten Teils der Untersuchung, durch Anregung eines Atoms änderten sich die Dimensionen des ganzen Kristalls, nicht anschließen.

H. Bethe (München).

Gans, Richard: Zur Theorie des Ferromagnetismus. II. Bemerkungen zur Energetik des Magnetismus. Schr. Königsberg. gelehrte Ges., Naturwiss. Kl. 8, 33—53 (1931).

Es werden die thermodynamischen Beziehungen des Magnetisierungsvorgangs aufgestellt; insbesondere wird die Wärmetönung berechnet und mit den Messungen von Adelsberger und Ellwood verglichen. Es zeigt sich, daß sie sich direkt aus den beobachteten Hysteresiskurven bei zwei benachbarten Temperaturen berechnen läßt. Ferner wird näher auf die aus der Akulovschen Annahme folgenden Beziehungen zwischen Spannung und Wärmetönung eingegangen, daß die Deformation eines Kristalls durch die Magnetostriktion allein gegeben ist, dabei aber darauf aufmerksam gemacht, daß dieser Annahme eine theoretische oder experimentelle Begründung fehlt. *Bloch.*

Gerlach, Walther, and Erno Englert: A new relation between electrical resistance and energy of magnetisation. *Nature* (Lond.) 1931 II, 151—152.

Oberhalb des Curiepunktes zeigen ferromagnetische Substanzen in einem äußeren Magnetfeld eine Abnahme des elektrischen Widerstandes proportional dem Quadrat der Magnetisierung. Unterhalb des Curiepunktes ist erst eine Zunahme, dann eine Abnahme des Widerstandes mit wachsendem Magnetfeld festzustellen. Neue sehr genaue Messungen zeigen, daß die Widerstandsabnahme immer proportional dem Quadrat der Magnetisierung d. h. der „Magnetisierungsenergie“ erfolgt, und zwar der wahren Magnetisierungsenergie, während die Widerstandszunahme unterhalb des Curiepunktes, sowie in der Nähe des Curiepunktes für schwache Felder beobachtete lineare Verlauf der Widerstandsänderung mit dem Magnetfeld lediglich auf das Parallelrichten der Magnetisierung in verschiedenen Gebieten des Kristalls zurückführbar zu sein scheint.

Bloch (Kopenhagen).

Wolf, A.: Über die Magnetonzahlen ferromagnetischer Stoffe. (*Inst. f. Theoret. Phys., Univ. Leipzig.*) *Z. Physik* 70, 519—538 (1931).

Es wird gezeigt, daß die elektrostatischen Kräfte zwischen den Atomen einen solchen Zustand eines Ferromagneten verständlich machen, bei dem nicht alle Atome sich im selben Zustand befinden, sondern bei dem ein Gemisch von Atomen verschiedener Multiplizität vorliegt. Dies gibt eine Erklärung für die beobachteten nichtganzzahligen Magnetonzahlen bei den Ferromagnetika. Aus der Sättigungsmagnetisierung bei tiefen Temperaturen läßt sich unter plausibeln Annahmen über die vorkommenden Multiplizitäten deren Mischungsverhältnis bestimmen und daraus das paramagnetische Verhalten oberhalb des Curiepunktes berechnen. Es ergibt sich in befriedigender Übereinstimmung mit der Erfahrung.

Bloch (Kopenhagen).

Barnett, S. J.: Researches on the rotation of permalloy and soft iron by magnetization and the nature of the elementary magnet. (*California Inst. of Technol., Pasadena.*) *Proc. amer. Acad. Arts a. Sci.* 66, 273—348 (1931).

Neue Messungen zur Bestimmung des Verhältnisses ρ von mechanischem und magnetischem Moment ergeben für dieses mit einer Genauigkeit von 0,2% nicht den vom rotierenden Elektron her zu erwartenden Wert mc/e sondern für Eisen $\rho = (1,037 \pm 0,003) mc/e$; für Permalloy $\rho = (1,049 \pm 0,003) mc/e$. Es wird vermutet, daß die Abweichung von einem schwachen Beitrag der Elektronenbahnen zur Magnetisierung herrührt.

Bloch (Kopenhagen).

Perrier, Albert: Lignes générales d'une théorie de la magnétostriction. (*Labor. de Phys., Univ., Lausanne.*) *Helvet. phys. Acta* 4, 213—237 (1931).

Unter der Weißschen Annahme spontan magnetisierter Elementargebiete und der Vorstellung, daß deren Magnetisierung sich unter dem Einfluß eines äußeren Feldes zu drehen sucht, wobei durch mechanische und magnetische Wirkungen Kräftepaare auftreten können, die sich dieser Drehung entgegenzusetzen streben, wird versucht, in qualitativer Weise zahlreiche Erscheinungen des Ferromagnetismus zu erklären, wie das Verhalten der Magnetostriktion in Feldern verschiedener Stärke, die Alterungserscheinungen, die Temperaturabhängigkeit der Anfangssuszeptibilität u. a. m. Leider wird in keiner Weise darauf eingegangen, inwieweit die hier entwickelten Vorstellungen

mit den modernen Atomtheorien des Ferromagnetismus verträglich sind; eine etwas mehr quantitative, formelmäßige Festlegung, die hier völlig fehlt, wird für eine kommende Arbeit in Aussicht gestellt.

Bloch (Kopenhagen).

Peierls, R.: Zur Theorie der magnetischen Widerstandsänderung. (*Phys. Inst., Eidgen. Techn. Hochsch., Zürich.*) *Ann. Physik*, V. F. 10, 97—110 (1931).

Die vorliegende Arbeit stellt eine genauere Durcharbeitung der früher in den Leipziger Vorträgen mitgeteilten Resultate dar (Leipzig: S. Hirzel 1930, S. 75). Das zugrundegelegte Modell ist das voneinander unabhängiger Elektronen in einem periodischen Kraftfeld; ohne über dieses nähere Annahmen zu machen, ist es für die Erklärung der Größenordnung des Effektes wesentlich, daß die Energie im Gegensatz zum Fall freier Elektronen nicht kugelsymmetrisch von den Ausbreitungsvektoren der Elektronenwellen abhängt. Der Umstand, daß die Energieniveaus im Magnetfeld diskret sind, darf vernachlässigt werden, wenn $H\mu \ll kT$ angenommen wird. Die Diskussion der Stationaritätsgleichung zeigt, daß es eine charakteristische Feldstärke

$$H_1 = \frac{4\pi e c}{\sigma} \quad \begin{array}{l} \sigma = \text{Leitfähigkeit,} \\ n = \text{Zahl der Elektronen pro Volumeneinheit} \end{array}$$

gibt, bei der die mittlere freie Weglänge vergleichbar mit dem mittleren Krümmungsradius der Elektronenbahnen im Magnetfeld ist. Für $T \gg \Theta$, die charakteristische Temperatur, gilt in schwachen Feldern ($H \ll H_1$) für den Widerstand

$$R = R_0 [1 + \alpha (H/H_1)^2].$$

In starken Feldern nähert sich der Widerstand einem Grenzwert, der sich von dem Werte für $H = 0$ nur durch einen temperaturunabhängigen Faktor unterscheidet. Für $T \ll \Theta$ sind die Verhältnisse verwickelter. Neben der charakteristischen Feldstärke $H = H_1$ gibt es noch eine zweite, die sich für tiefe Temperaturen wie T^3 verhält. Das quadratische Verhalten der Widerstandsänderung für schwache Felder, sowie ihr Erreichen eines konstanten Grenzwertes für starke Felder bleibt aber erhalten.

Bloch (Kopenhagen).

Barnes, R. Bowling, and M. Czerny: Concerning the reflection power of metals in thin layers for the infrared. (*Phys. Inst., Univ. Berlin.*) *Physic. Rev.*, II. s. 38, 338—345 (1931).

Es wird das Reflexionsvermögen R von Antimonspiegeln der Dicke 0,18—0,19 μ untersucht. Für R werden Werte gefunden, die weit unterhalb dessen liegen, den man nach der Drudeschen Formel bei der verwendeten Wellenlänge (52 μ) erwartet hat. Dies kann mit der klassischen elektromagnetischen Theorie nicht erklärt werden, wenn man zwar der Dicke des Spiegels Rechnung trägt, aber für die Leitfähigkeit und für die optischen Konstanten des Antimonspiegels die für das kompakte Metall gültigen Werte annimmt. Deshalb wird vermutet, daß letztere Annahme unzulässig ist, und die Untersuchung der Frage in Aussicht gestellt.

L. Tisza (Budapest).

Frenkel, J.: Some remarks on the theory of the photoelectric effect. *Physic. Rev.*, II. s. 38, 309—320 (1931).

In dem ersten Teil der Arbeit wird eine einfache Berechnung des Photoeffekts für wasserstoffähnliche Atome gegeben, bei der die auslaufenden Elektronen durch ebene Wellen approximiert werden. Die Theorie führt zu den bekannten Ergebnissen und erlaubt auch die Mitberücksichtigung der Kernbewegung. Im zweiten Teil wird die Behandlung des Photoeffekts an Metallen durch Tamm und Schubín (vgl. dies. Zbl. 1, 178) kritisiert. Der Verf. ist der Ansicht, daß diese Theorie bei Benutzung der korrekten Werte für die Nullpunktsenergie der Elektronen nicht das selektive Maximum wiedergibt, sondern daß letzteres auf eine selektive Durchlässigkeit der Oberflächenschicht zurückzuführen ist. Es wird angedeutet, daß schon ein so einfacher Potentialverlauf wie eine abgeflachte Treppenstufe (d. h. eine solche, bei der der Übergang zwischen zwei konstanten Potentialwerten durch eine geneigte Gerade erfolgt) zu einer solchen selektiven Transmission führen kann.

Nordheim (Göttingen).

Jabloński, A.: Über die Stoßverbreiterung der Spektrallinien und den Energieaustausch bei Zusammenstößen. *Z. Physik* **70**, 723—732 (1931).

Die Quantensprünge als momentane Prozesse betrachtend, wird auf Grund der Franckschen Potentialkurven die Stoßverbreiterung in rein qualitativer Weise untersucht. Ferner werden auf Grund des wellenmechanischen Satzes von der Überwindung von Potentialbergen durch Korpuskeln qualitative Betrachtungen über den Energieaustausch bei Zusammenstößen sowie über die sensibilisierte Fluoreszenz angestellt. (Diese Probleme wurden inzwischen auch quantitativ von P. M. Morse und E. C. G. Stueckelberg und O. K. Rice behandelt. D. Ref.) *Sezl* (Wien).

Kallmann, H., und B. Rosen: Die Elementarprozesse der Ionisation durch Stoß materieller Teilchen. I. (*Kaiser Wilhelm-Inst. f. Phys. Chem. u. Elektrochem., Berlin-Dahlem.*) *Physik. Z.* **32**, 521—544 (1931).

Zusammenfassender Bericht. Inhaltsübersicht: I. Theorie des Stoßvorganges. 1. Klassischer Stoßansatz. 2. Wellenmechanischer Stoßansatz. II. Elektronenstoß. 1. Experimentelle Methode. 2. Experimentelle Ergebnisse. a) Einfache Atomionisation. b) Einfache Ionisation von Molekülen. c) Ionisation mit Anregung. d) Bildung mehrfach geladener Ionen. e) Geschwindigkeit der Sekundärelektronen beim Elementarprozeß der Ionisation. f) Ionisation durch schnelle Elektronen. g) Ionisation an adsorbierten Gasschichten. h) Ionisation an festen Körpern. 3. Ionisationswahrscheinlichkeit. *Sezl* (Wien).

Møller, Christian: Über den Stoß zweier Teilchen unter Berücksichtigung der Retardation der Kräfte. (*Univ.-Inst. f. Teoret. Fys., København.*) *Z. Physik* **70**, 786 bis 795 (1931).

Im Anschluß an Bethe wird eine sinngemäße Verallgemeinerung der Bornschen Stoßtheorie angegeben und relativistisch invariante Ausdrücke für die Streuung sehr schneller Teilchen hergeleitet. Für den Stoß zwischen zwei Elektronen wird nach dieser Methode der Wirkungsquerschnitt berechnet. Das erhaltene Resultat wird mit einer früheren Behandlung des Problems durch Gaunt verglichen und gezeigt, daß der von Gaunt gewählte Ansatz für die Wechselwirkung, der wohl die Spinwechselwirkung, aber nicht die Retardation berücksichtigt, unzureichend ist, da in den meisten Fällen der Einfluß der Retardation von derselben Größenordnung ist wie Spinwechselwirkung. Zum Schluß wird noch der Austausch berücksichtigt und Formeln für zwei Grenzfälle angegeben, daß 1. die Geschwindigkeit der einfallenden Elektronen in einem Gebiet liegt, wo nach v/c entwickelt werden kann, 2. v so groß ist, daß $1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ sehr groß gegen 1 ist. Im ersten Falle erhält man die relativistische Verallgemeinerung einer Formel von Mott, wobei sich zeigt, daß die Symmetrie um $\pi/4$ verlorengeht. Das Minimum, das nach Mott bei $\pi/4$ vorhanden sein soll, ist gegen kleinere Streuwinkel verschoben, und zwar ist diese Asymmetrie schon bei $(v/c)^2 \sim 1/3$ (d. h. bei Geschwindigkeiten von 120000 V) sehr beträchtlich, so daß dieser Asymmetrieeffekt experimentell nachweisbar sein sollte. (Dieser Fall wurde übrigens schon auf Grund eines Ansatzes von Breit von H. C. Wolfe diskutiert. Der Ref.) Der zweite Fall dürfte bei den das Nordlicht erzeugenden Elektronen und bei den Korpuskularstrahlen, welche die Höhenstrahlung begleiten, von Bedeutung sein. *Sezl* (Wien).

Mott, N. F.: On the influence of radiative forces on the scattering of electrons. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **27**, 255—267 (1931).

Es wird die Streuung von Elektronen an einem festen Kern betrachtet. Verf. zeigt, daß die aus der Beschleunigung der Elektronen im Kernfeld resultierenden Strahlungskräfte die gesamte Streustrahlung — bei beliebig großer Geschwindigkeit der Elektronen — bloß um 2—3% ändern. Die Diskrepanz zwischen der vom Verf. (*Proc. Roy. Soc. [A]*, **124**, 425, 1929) erhaltenen Formel und der Erfahrung (Versuche von Chadwick und Mercier) beträgt an 40% und kann somit (entgegen einer früheren Vermutung des Verf. in der zitierten Arbeit) auf diese Weise nicht behoben werden. Bemerkenswerter noch als dieses Resultat (das auch korrespondenzmäßig erschlossen

werden kann) ist die in der Arbeit verwendete Methode: Die aus der Diracschen Strahlungstheorie für Atom + Strahlung sich ergebende Wellengleichung wird nicht auf dem üblichen Wege, der übrigens auf divergente Integrale führt, sondern vermittels ihrer Greenschen Funktion behandelt. Am Schluß der Arbeit findet sich noch ein Vergleich des aus den Formeln des Verf. resultierenden Ausdrucks für das kontinuierliche Röntgenspektrum, mit dem entsprechenden von Gaunt (Phil. Trans. Roy. Soc. **229**, 163, 1930) auf anderem Wege erhaltenen Ausdruck. *Guth* (Wien).

Muskat, Morris: The anomalous scattering of alpha-rays. Physic. Rev., II. s. 38, 23—31 (1931).

Nach der Bornschen Theorie wird bekanntlich die Streufunktion in erster Näherung durch ein Integral über das Potentialfeld des Streusystems gegeben. Dieser Ausdruck wird invertiert und gibt dann das Potentialfeld als Integral über die beobachtete Streuintensität. In dieser Weise wird das Potentialfeld bestimmt, welches die von Rutherford, Chadwick und Bieler beobachtete Anomalität in der α -Streuung bei Mg hervorruft. Die so gefundene Differenz vom Coulembischen Potential ist weniger als 10%, oszilliert zwischen positiven und negativen Werten und nimmt mit zunehmendem Abstand vom streuenden Kern sehr schnell ab. *Waller* (Zürich).

James, R. W., and G. W. Brindley: Some numerical calculations of atomic scattering factors. Philosophic. Mag., VII. s. 12, 81—112 (1931).

Frühere Arbeiten über die Berechnung der Streukoeffizienten von Atomen für Röntgenstrahlen werden zusammengefaßt und eine neue Methode dazu angegeben, die darin besteht, daß mit Ausgangspunkt von solchen Atomen (und Ionen), für welche nach der Hartreeschen Methode die Ladungsverteilung schon berechnet ist, durch zweckmäßige Interpolation die Streukoeffizienten für andere Atome (und Ionen) berechnet werden. Diese Methode ist verwendbar bis Atomnummer 25. Ferner wird die Anwendung der Methode von Thomas-Fermi zur Berechnung von Streukoeffizienten (für höhere Atomnummer) diskutiert. Die Streukoeffizienten für eine große Anzahl von Atomen (und Ionen) werden in einer Tabelle gegeben. Außerdem wird der Einfluß der Wärmebewegung der Atome auf die Röntgeninterferenzen ausführlich diskutiert. *Waller*.

Buchwald, Eberhard: Zur Theorie der Röntgeninterferenzen in p-Azoxyanisol. (Phys. Inst., Techn. Hochsch., Danzig.) Ann. Physik, V. F. 10, 558—578 (1931).

Bei der Streuung von Röntgenstrahlen an p-Azoxyanisol in kristallin flüssiger Phase wird experimentell gefunden, daß ein einfacher Beugungsring auftritt. Durch Anlegen eines Magnetfelds senkrecht zur Strahlrichtung spaltet sich dieser Ring in halbmondförmige Sicheln (im allgemeinen senkrecht zum Magnetfeld). Der Verf. deutet diese Erscheinung durch eine Verallgemeinerung der Debyeschen Beugungstheorie. Während in dieser für die einzelnen streuenden Teilchen (Atome, Moleküle) vorausgesetzt wird, daß sie sich nur bis auf einen Minimalabstand nähern können, sich also in ihrer räumlichen Verteilung verhalten, als wären sie mit einer undurchdringlichen Kugel umgeben, wird hier entsprechend der langgestreckten Gestalt des betrachteten Moleküls angenommen, daß ihnen ein zylindrisches Volumen zukommt. Die Verteilung der Atome innerhalb des Moleküls wird durch eine Reihe von Streuzentren gleicher Strahlungsstärke auf der Zylinderachse repräsentiert. Es wird nun zunächst versucht, den experimentellen Befund zu deuten, indem im Magnetfeld alle Zylinder als gleichgerichtet gedacht werden, während in Abwesenheit des Magnetfeldes alle Achsenrichtungen gleichwahrscheinlich sein sollen. Hiermit ist jedoch eine genügende Übereinstimmung mit der Erfahrung noch nicht zu erzielen. Der Verf. sieht sich darum genötigt, die weitere Hypothese zu machen, daß die Zylinder gruppenweise mit parallelen Achsen beisammen bleiben, eine Hypothese zu der auch schon andere experimentelle Tatsachen geführt haben. Er erhält dann eine befriedigende Deutung der Meßresultate.

R. de L. Kronig (Groningen).